53. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Olympiadeklassen 11 und 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

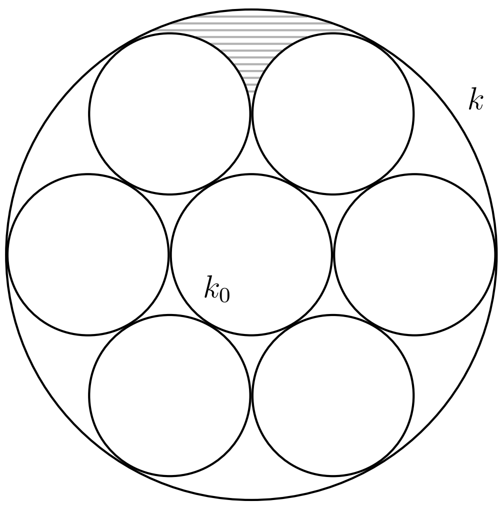
531221

Man bestimme alle nichtnegativen ganzzahligen Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 7\,, \\ 2x + y + 3z &= 9\,, \\ 3x + y + 4z &= 11\,. \end{aligned}$$

531222

Zwei konzentrische Kreise k und k_0 liegen so zueinander, dass es genau sechs zum Kreis k_0 kongruente Kreise gibt, die den Kreis k_0 von außen, den Kreis k von innen und je zwei der sechs Kreise berühren. Man berechne die Größe des Inhalts des schraffierten Flächenstückes in Abhängigkeit vom Radius r des Kreises k_0.



Auf der nächsten Seite geht es weiter!

531223

Gegeben seien eine natürliche Zahl $n \geq 1$ und n reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Die Summe dieser n Zahlen sei s. Bekannt sei, dass für jede dieser Zahlen die Ungleichung

$$x_i \leq \frac{1}{n+1}(s + 2013)$$

erfüllt ist. Man zeige, dass man dann eine dieser Zahlen x_m $(1 \leq m \leq n)$ so auswählen kann, dass für beliebige Indizes i und j stets gilt

$$x_i - x_j \leq \frac{1}{2}(2013 - x_m)\,.$$

531224

Man beweise, dass keine der Zahlen 1, 1001, 1001001, 1001001001, 1001001001001, ... eine Primzahl ist.