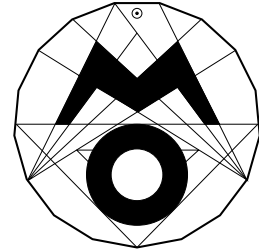


53. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalsrunde)
Olympiadeklasse 8
Aufgaben



© 2013 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

530821

In der Klausur der 2. Stufe der Mathematik-Olympiade können maximal 40 Punkte erreicht werden. Paula ist an ihrem Ergebnis sehr interessiert und fragt ihren Mathematik-Lehrer. Dieser antwortet:

- (1) „Ein Teiler deiner Gesamtpunktzahl ist eine Mirpzahl.“
- (2) „Wenn du die Quersumme deiner Gesamtpunktzahl verdoppelst und 7 addierst, erhältst du auch eine Mirpzahl.“

Zeige, dass aus diesen Angaben Paulas Gesamtpunktzahl eindeutig bestimmt werden kann, und gib diese Gesamtpunktzahl an.

Bemerkung: Eine *Mirpzahl* ist eine Primzahl, die eine andere Primzahl ergibt, wenn man die Ziffern von rechts nach links liest. Folglich ist 13 die erste Mirpzahl. Liest man das Wort „mirp“ von rechts nach links, so erhält man das Wort „prim“.

530822

In einem Haus mit übereinanderliegenden Geschossen wohnen die Familien Albrecht, Becker, Conrad, Dietrich, Ermler, Fritsche, Geißler, Hamann, Illgner, Kästner, Lorenz, Männig, Nolte, Oswald, Petzold und Richter. In jedem Geschoss wohnen genau zwei Familien. Außer den Genannten gibt es keine weiteren Mieter. Keine der Wohnungen steht leer. Außerdem ist Folgendes bekannt:

- (1) Albrechts wohnen zwei Geschosse tiefer als Beckers.
 - (2) Beckers wohnen sechs Geschosse höher als Conrads.
 - (3) Familie Fritsche wohnt mit Familie Geißler im selben Geschoss.
 - (4) Familie Männig wohnt vier Geschosse höher als Familie Nolte und zwei Geschosse tiefer als Familie Fritsche.
 - (5) Familie Oswald wohnt ein Geschoss über Familie Nolte.
 - (6) Familie Petzold wohnt fünf Geschosse unter Familie Geißler.
- a) Ermittle, welche Familie mit Familie Petzold im selben Geschoss wohnt.
b) Ermittle, in welchem Geschoss Familie Albrecht wohnt.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

530823

Beweise folgende Sätze:

- a) Wenn ein Dreieck gleichseitig ist, dann ist die Summe der Größen zweier zu verschiedenen Eckpunkten gehörender Außenwinkel immer doppelt so groß wie die Summe der Größen der zugehörigen Innenwinkel.
- b) Wenn in einem Dreieck die Summe der Größen je zweier zu verschiedenen Eckpunkten gehörender Außenwinkel stets doppelt so groß ist wie die Summe der Größen der beiden zugehörigen Innenwinkel, dann ist das Dreieck gleichseitig.

530824

Professor Altmann ist Archäologe. Bei Ausgrabungen stößt er auf ein Kästchen mit zehn Hölzchen, von denen keine zwei gleich lang sind. Er weiß, dass damals kleine Längen in Fingerbreiten, als Einheit abgekürzt fb, gemessen wurden. Bei Anordnung der Hölzchen der Länge nach vom kürzesten zum längsten stellt er fest, dass die Längendifferenz aufeinanderfolgender Hölzchen konstant d Fingerbreit beträgt. Sind also a_1, a_2, \dots, a_{10} die Maßzahlen der geordneten Hölzchenlängen, so gilt $a_2 = a_1 + d, a_3 = a_2 + d, \dots, a_{10} = a_9 + d$.

Prof. Altmann vermutet, dass die Hölzchen früher einmal der Längenmessung dienten, indem Summen durch Hintereinanderlegen und Differenzen durch Nebeneinanderlegen bei gleichem Anfangspunkt gebildet wurden. Um diese Vermutung zu untersuchen, hat er jeweils einige der Hölzchen hintereinandergelegt: Das kürzeste und zweitkürzeste Hölzchen haben zusammen eine Länge von 13 fb, die Summe der Längen des viert- bis einschließlich siebtkürzesten Hölzchens beträgt 74 fb.

- a) Bestimme allgemein die Maßzahl der Länge a_n des n -ten Hölzchens in Abhängigkeit von n und gib dann die Maßzahlen a_1, a_2, \dots, a_{10} an.
- b) Wie kann man durch Ablegen geeigneter Hölzchen Längen von 67 fb, 2 fb und 1 fb abmessen?
- c) Untersuche, ob jede ganzzahlige Länge von 1 fb bis 34 fb durch Verwendung von jeweils höchstens 4 Hölzchen gemessen werden kann, wobei in jeder Messung jedes Hölzchen höchstens einmal verwendet werden darf.