53. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklasse 8
Aufgaben

© 2013 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

530811

Von den 36 Teilnehmern eines Absolvententreffens wohnt jeder in genau einem der Bundesländer Hessen, Bayern, Niedersachsen, Hamburg, Sachsen. Außerdem ist bekannt:

(1) Mehr als die Hälfte aller Absolventen wohnt in Bayern.
(2) Es sind mehr Teilnehmer aus Sachsen als aus Hamburg.
(3) Die Teilnehmer aus Hessen und Niedersachsen zusammen sind ein Neuntel aller Teilnehmer.
(4) In Hamburg wohnen doppelt so viele von diesen Absolventen wie in Hessen.
(5) Die Anzahl der Absolventen aus Hessen ist größer als das Doppelte, aber kleiner als das Vierfache der Anzahl der Absolventen aus Niedersachsen.

Ermittle, wie viele Teilnehmer an diesem Treffen jeweils in Hessen, Bayern, Niedersachsen, Hamburg bzw. Sachsen wohnen.

530812

Friederikes Spielkiste enthält viele gleich große, einfarbige Kugeln in fünf verschiedenen Farben. Sie entnimmt der Kiste vier Kugeln und baut daraus auf einem Drehteller eine Kugelpyramide. Eine solche Pyramide besteht aus drei unteren Kugeln, welche auf dem Drehteller liegen und einander paarweise berühren, sowie einer oberen Kugel, welche die drei unteren berührt. Zwei Kugelpyramiden gelten als verschieden, wenn sie nicht durch Drehen des Tellers ineinander überführt werden können.

Ermittle, wie viele verschiedene Kugelpyramiden sich errichten lassen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

530813

Von einem Dreieck ABC wird gefordert:

(1) Der Innenwinkel BAC hat die Größe $\alpha = 45°$.

(2) Die Strecke $\overline{CD}$ vom Punkt C zum Lotfußpunkt D auf der Geraden AB ist 5 cm lang.

(3) Der (spitze) Winkel zwischen der Geraden CD und der Winkelhalbierenden w_γ des Winkels ACB hat eine Größe δ mit $\delta > 0°$.

a) Konstruiere ein solches Dreieck ABC für $\delta = 10°$ und beschreibe deine Konstruktion.

b) Überprüfe anhand der Zeichnung, ob es für $\delta = 10°$ mehrere zueinander nicht kongruente Dreiecke ABC mit den Eigenschaften (1), (2) und (3) gibt.

Zusatzaufgabe für interessierte Schüler:

c) Finde eine hinreichende und notwendige Bedingung, die die Winkelgröße δ erfüllen muss, damit es zwei zueinander nicht kongruente Dreiecke ABC mit den Eigenschaften (1), (2) und (3) gibt.

Hinweis: Ausgehend von der Existenz zweier zueinander nicht kongruenter Dreiecke mit den geforderten Eigenschaften erhält man eine Bedingung, die δ erfüllen muss, die also *notwendig* für die Existenz der Dreiecke ist. Um zu zeigen, dass diese Bedingung an δ auch *hinreichend* ist, könnte man die Existenz der gesuchten Dreiecke konstruktiv zeigen. Es muss dann noch gezeigt werden, dass die Konstruktionen durchführbar sind und dass die so konstruierten Dreiecke tatsächlich die geforderten Eigenschaften besitzen.

530814

Alyssa beschäftigt sich gern mit Zahlenfolgen. Diesmal untersucht sie eine so genannte Mittelwertfolge: Alyssa schreibt zuerst die Zahlen 1 und 5 auf. Sie bezeichnet sie mit a_1 und a_2. Die folgende Zahl a_3 errechnet sie so, dass a_2 das arithmetische Mittel von a_1 und a_3 ist, also $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + a_3)$ gilt. Allgemein soll gelten, dass außer a_1 jede Zahl in der Folge das arithmetische Mittel seines Folgenvorgängers und seines Folgennachfolgers ist. Auf diese Weise erhält Alyssa eine Folge positiver ganzer Zahlen a_n. Diese Zahlen heißen Glieder der Folge. Der Index n gibt an, das wievielte Folgenglied gerade berechnet wird. Der Index n durchläuft die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, ... In der Sprache der Mathematik lässt sich Alyssas Folge so darstellen:

Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$, wobei $a_1 = 1$ und $a_2 = 5$ gelten.

a) Gib die nächsten fünf Zahlen a_3, a_4, a_5, a_6 und a_7 von Alyssas Zahlenfolge an.

b) Bestimme das 53. Glied a_{53} der Folge.

c) Untersuche, ob auch die Zahl 2013 zur Folge gehört.

d) Alyssa empfindet es als sehr umständlich, jedes Mal alle Folgenglieder mühsam ausrechnen zu müssen, um irgendein späteres Folgenglied zu erhalten. Sie sucht daher nach einer Formel, mit der sie sofort für einen beliebigen Index n die Zahl a_n berechnen kann. Nach ein wenig Überlegen findet sie eine solche Formel.

Ermittle auch du eine solche Formel.

e) Alyssa möchte schließlich noch die Summe aller Glieder der betrachteten Folge von a_1 bis a_{53} berechnen, ohne dabei alle 53 Summanden nacheinander zu addieren.

Gib eine Möglichkeit an, wie Alyssa dies erreichen kann.