

52. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 9
Aufgaben – 1. Tag



© 2013 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

520941

Schreibt man die Ziffern einer natürlichen Zahl z in umgekehrter Reihenfolge auf, erhält man die Zahl u . Beispielsweise folgt aus $z = 31$ entsprechend $u = 13$.

- a) Ermitteln Sie alle zweistelligen Zahlen z , die größer als das entsprechende u sind und für die $z^2 - u^2$ eine Quadratzahl ergibt.
- b) Fügt man in die Zifferndarstellung einer zweistelligen Zahl $[ab]$ in der Mitte eine Null ein, erhält man eine dreistellige Zahl $z = [a0b]$ und entsprechend ihre Umkehrzahl $u = [b0a]$. Ermitteln Sie die Anzahl der Zahlen z dieser Art, die größer als das entsprechende u sind und für die $z^2 - u^2$ eine Quadratzahl ist.

520942

Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 1 und eine Senkrechte g zur Geraden AC durch A . Auf der Geraden g wird ein Punkt P gewählt und der Strahl h senkrecht zu g durch P so gezeichnet, dass er in der gleichen Halbebene wie C bezüglich g liegt. Auf h wird der Punkt Q so bestimmt, dass die Strecken \overline{CP} und \overline{PQ} gleich lang sind. Die Lotfußpunkte von Q auf die Geraden AB und AD werden mit R bzw. S bezeichnet.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Rechtecks mit den Eckpunkten A, R, Q, S in Abhängigkeit von der Länge der Strecke \overline{AP} !

520943

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen (x, y, z) des Gleichungssystems

$$x - \frac{1}{y} = y - \frac{1}{z} = z - \frac{1}{x}.$$