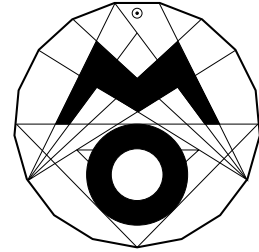


52. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Olympiadeklasse 8
Aufgaben – 2. Tag



© 2013 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

520844

Ermittle die kleinste Primzahl, welche Teiler von $4^{52} + 52^{2013} + 2013^{52}$ ist.

520845

In einem Dreieck ABC sei M der Mittelpunkt des Umkreises. Spiegelt man die Punkte A , B und C am Punkt M , erhält man als Bildpunkte A' , B' bzw. C' .

Es wird vorausgesetzt, dass die Punkte A , B , C , A' , B' und C' paarweise verschieden sind. Durch diese Punkte A , B , C , A' , B' und C' wird daher genau ein konvexes Sechseck gebildet, dessen Eckpunkte nicht notwendigerweise in dieser Reihenfolge aufgezählt sein müssen.

Weiter wird vorausgesetzt, dass der Innenwinkel bei B der größte der drei Innenwinkel des Dreiecks ABC ist.

- a) Je zwei Innenwinkel dieses Sechsecks werden einander gegenüberliegend genannt, wenn ihre Scheitelpunkte A und A' , B und B' bzw. C und C' sind. Untersuche, ob die einander gegenüberliegenden Innenwinkel dieses Sechsecks jeweils dieselbe Größe haben.
- b) Ermittle die Größen der Innenwinkel dieses Sechsecks in Abhängigkeit von den Größen der Innenwinkel im Dreieck ABC .

520846

Es sei n eine positive ganze Zahl und es seien $2n$ beliebige, aber paarweise verschiedene Punkte gegeben, die auf einem Kreis liegen.

Betrachtet werden alle Möglichkeiten, n Strecken mit diesen Punkten als Eckpunkte derart zu bilden, dass je zwei verschiedene dieser Strecken keine gemeinsamen Punkte haben. Die Anzahl C_n dieser Möglichkeiten heißt n -te Catalan-Zahl.

Man setzt $C_0 = 1$.

- a) Ermittle die Catalan-Zahlen C_1 , C_2 und C_4 .
- b) Ermittle die Catalan-Zahl C_8 .
- c) Leite eine Formel zur Bestimmung der Catalan-Zahl C_{n+1} aus den vorherigen Catalan-Zahlen C_0 bis C_n für beliebige natürliche Zahlen n her.