52. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Olympiadeklassen 11 und 12
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

521234

In einer Lagerhalle stehen 20 Kisten mit Äpfeln und Birnen. Jede Kiste enthält nicht mehr als 30 Äpfel und nicht mehr als 20 Birnen, gegebenenfalls auch keinen Apfel, keine Birne oder überhaupt keine Frucht.

Egon, Benny und Kjeld wollen diese Kisten unter sich aufteilen. Als Chef will sich zunächst Egon einige, aber nicht alle Kisten nehmen. Danach soll es möglich sein, die verbleibenden Kisten gerecht zwischen Benny und Kjeld aufzuteilen. Eine Aufteilung gilt als gerecht, wenn beide gleich viele Kisten, gleich viele Äpfel und gleich viele Birnen haben; dabei ist nicht ausgeschlossen, dass Benny und Kjeld bei einer oder beiden Obstsorten leer ausgehen.

Man zeige, dass sich Egon mindestens zehn Kisten nehmen kann.

521235

Man beweise, dass es keine ganzen Zahlen x und y gibt, die die Gleichung

$$19x^3 - 17y^3 = 50$$

erfüllen.

521236

Man bestimme alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die das Gleichungssystem

$$3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4\left(y + \frac{1}{y}\right) = 5\left(z + \frac{1}{z}\right), \tag{1}$$

$$xy + yz + zx = 1 \tag{2}$$

erfüllen.