

51. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 12–13
Aufgaben – 1. Tag



© 2012 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

511341

Gegeben sei die Folge (a_n) durch $a_0 = -4$, $a_1 = -7$ und $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$.

Man beweise, dass es unendlich viele n gibt, für die a_n eine zusammengesetzte positive ganze Zahl ist.

511342

Im Landkreis „Kreisland“ gibt es $n \geq 3$ Dörfer, von denen einige durch Straßen miteinander verbunden sind. Jede Straße verbindet genau zwei Dörfer. Dazwischen gibt es keine Kreuzungen oder Abzweigungen, Tunnel und Brücken sind jedoch möglich. Zwischen je zwei Dörfern gibt es höchstens eine Straße.

Es ist bekannt, dass man von jedem Dorf aus jedes andere auf diesen Straßen erreichen kann. Außerdem wurde festgestellt, dass dies nicht mehr möglich ist, wenn für ein Fahrradrennen irgendein Rundkurs von Straßen zwischen den Dörfern gesperrt wird.

Man bestimme die maximal mögliche Anzahl von Straßen im Kreisland.

511343

Gegeben seien ein Dreieck ABC und ein Kreis k , wobei gelte:

- (1) Der Kreis k verläuft durch die Eckpunkte A und B des Dreiecks ABC und berührt die Gerade AC .
- (2) Die Tangente an den Kreis k im Punkt B schneidet die Gerade AC in einem Punkt X , der von C verschieden ist.
- (3) Der Umkreis u des Dreiecks BXC schneidet den Kreis k in einem Punkt Q , der von B verschieden ist.
- (4) Die Tangente an den Kreis u im Punkt X schneidet die Gerade AB in einem Punkt Y .

Man beweise, dass die Gerade XY den Umkreis p des Dreiecks BQY berührt.