51. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 11
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

511144

Es seien a und b positive reelle Zahlen und n eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$.

Man beweise, dass folgende Aussage gilt:

Für alle positiven reellen Zahlen x, die die Ungleichung

$$x^n \leq ax + b$$

erfüllen, ist

$$x < \sqrt[n-1]{2a} + \sqrt[n]{2b}\,.$$

511145

In einem Tetraeder seien a und b die Längen zweier Kanten, die keinen Punkt gemeinsam haben, und r der Radius der Inkugel. Beweisen Sie die Ungleichung

$$r < \frac{ab}{2(a+b)}.$$

511146

Eine Zahlenfolge (x_n) ist durch $x_1 = 1$ und das rekursive Bildungsgesetz

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}\,, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

gegeben. Man untersuche, ob es keine, genau eine oder mehrere Zahlen gibt, die größer sind als alle Glieder mit ungeradem Index, aber kleiner als alle Glieder mit geradem Index.