51. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 8
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

510844

Die Vokantianer benutzen wie wir in ihrer Schriftsprache ein Alphabet aus Konsonanten- und Vokalbuchstaben. In der Vokant-Schriftsprache gibt es keine Wörter, bei denen zwei Vokalbuchstaben bzw. zwei Konsonantenbuchstaben unmittelbar aufeinanderfolgen. Die Wörter können mit Vokal- oder Konsonantenbuchstaben beginnen. Jede endliche Folge von sich so abwechselnden Vokal- oder Konsonantenbuchstaben ergibt tatsächlich auch ein Wort in der Vokant-Schriftsprache. Ein Vokantianer behauptet, dass die Vokant-Schriftsprache genau 4800 fünfbuchstabige Wörter besitzt.

Untersuche, ob die Vokant-Schriftsprache tatsächlich genau 4800 fünfbuchstabige Wörter haben kann.

510845

Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$. Die Punkte E und F liegen derart auf der Seite $\overline{AB}$, dass für die entsprechenden Streckenlängen $|AE| : |EB| = 1 : 3$ und $|AF| : |FB| = 3 : 1$ gelten. Die Punkte G und H liegen derart auf der Seite $\overline{CD}$, dass für die entsprechenden Streckenlängen $|CG| : |GD| = 1 : 3$ und $|CH| : |HD| = 3 : 1$ gelten.

Die Geraden DF und AG, DF und EC, EC und BH sowie AG und BH schneiden jeweils einander in den Punkten P, Q, R bzw. S.

Ermittle den Flächeninhalt des Zwölfecks $AEQFBRCGSHDP$ in Abhängigkeit von der Seitenlänge a des Quadrates $ABCD$.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

510846

Gegeben seien positive ganze Zahlen m, n, $z_1, z_2, \ldots, z_m$ und $s_1, s_2, \ldots, s_n$, für die

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_m = s_1 + s_2 + \cdots + s_n$$

gilt. Gegeben sei weiter eine leere Tabelle mit m Zeilen und n Spalten. Es sollen in diese Tabelle nichtnegative ganze Zahlen derart eingetragen werden, dass die Zahlen z_1, z_2, …, z_m die Zeilensummen sowie die Zahlen s_1, s_2, …, s_n die Spaltensummen sind und dass in nicht mehr als $m + n - 1$ Feldern positive ganze Zahlen stehen.

a) Finde eine solche Eintragung für $m = 7$, $n = 10$ und

$$z_1 = 8,\ z_2 = 12,\ z_3 = 17,\ z_4 = z_5 = 19,\ z_6 = 23,\ z_7 = 94,$$
$$s_1 = 3,\ s_2 = 4,\ s_3 = 13,\ s_4 = 14,\ s_5 = 17,\ s_6 = s_7 = 23,\ s_8 = s_9 = 31,\ s_{10} = 33.$$

(Es gilt $z_1 + z_2 + \cdots + z_7 = s_1 + s_2 + \cdots + s_{10} = 192$.)

b) Beweise allgemein, dass es stets eine derartige Eintragung gibt.

Hinweis: Mit Zeilensumme wird die Summe der Zahlen bezeichnet, die in einer Zeile stehen. Mit Spaltensumme wird die Summe der Zahlen bezeichnet, die in einer Spalte stehen.