51. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 11–13
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

511331

Man ermittle alle reellen Zahlen a und b, für die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 54, \\ ax - y &= b \end{aligned}$$

keine reellen Lösungen x, y hat.

511332

Der Inkreis des Dreiecks ABC berühre die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$ des Dreiecks ABC in den Punkten D bzw. E. Der Umkreis des Dreiecks ABC schneide den Umkreis des Dreiecks EDC außer im Punkt C noch in einem von C verschiedenen Punkt X.

Man beweise: Ist I der Mittelpunkt des Inkreises und O der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC, so schneiden sich die Geraden CO und IX auf dem Umkreis des Dreiecks ABC.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

511333

Ein Parallelogramm werde durch Geraden in Teilfiguren zerlegt. Die Abbildung A 511333 zeigt eine solche Zerlegung durch 3 Geraden in 5 Teilfiguren I–V.

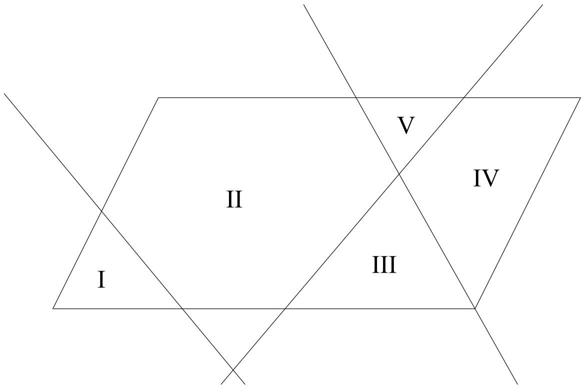

Abbildung A 511333

Man bestimme alle Parallelogramme, die man durch endlich viele Geraden so zerlegen kann, dass alle entstehenden Teilfiguren spitzwinklige Dreiecke sind.