51. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 8
Aufgaben – 1. Tag

© 2011 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
`www.mathematik-olympiaden.de`. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

510831

Landwirt Frohgemuth weiß, dass er mithilfe seiner zwei Traktoren A und B, die unterschiedliche Leistung haben, sein Maisfeld in 16 Stunden pflügen kann. Nun fällt ihm aber vor Beginn der Arbeit Traktor B vorübergehend aus, so dass zunächst Traktor A die Hälfte des Feldes allein bearbeitet. Die zweite Hälfte des Feldes pflügen dann beide Traktoren gemeinsam. Für die gesamte Arbeit wurden 20 Stunden benötigt.

Ermittle, wie viele Stunden jeder der beiden Traktoren für die Bearbeitung des gesamten Maisfeldes allein benötigen würde.

510832

Ein 4×4 -Quadrat setzt sich aus sechzehn 1×1 -Quadraten zusammen. In diese 16 kleinen Quadrate sollen die natürlichen Zahlen von 1 bis 8 derart eingetragen werden, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Jede Zahl wird genau zweimal eingetragen.
(2) In jeder Zeile kommen zwei gleiche Zahlen vor.
(3) In jeder Spalte kommen zwei gleiche Zahlen vor.

a) Gib eine Eintragung an, bei der die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt sind.
b) Beweise, dass es nicht möglich ist, die Zahlen derart einzutragen, dass (1), (2) und (3) erfüllt sind und zusätzlich alle Zeilensummen und Spaltensummen gleich sind.
c) Untersuche, ob es möglich ist, die Zahlen derart einzutragen, dass (1), (2) und (3) erfüllt sind und dass alle vier Zeilensummen gleich groß sind.

Hinweis: Mit Zeilensumme wird die Summe der Zahlen bezeichnet, die in einer Zeile stehen. Mit Spaltensumme wird die Summe der Zahlen bezeichnet, die in einer Spalte stehen.

510833

Es seien ABC ein spitzwinkliges Dreieck und H der Schnittpunkt seiner Höhen. Der Punkt H werde an der Geraden AB gespiegelt; der Bildpunkt werde mit H' bezeichnet.

Beweise: Das Viereck $AH'BC$ ist ein Sehnenviereck.