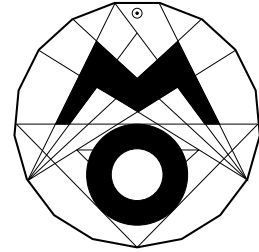


51. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalsrunde)
Klasse 11-13
Aufgaben



© 2011 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

511321

Es sei $Q(n)$ die Quersumme der natürlichen Zahl n . Man beweise, dass

$$Q(m+n) \leq Q(m) + Q(n)$$

für alle positiven ganzen Zahlen m und n gilt.

511322

Die *Salinon* genannte Figur wird von vier Halbkreisbögen begrenzt (siehe Abbildung A511322). Die Strecken \overline{AC} und \overline{DB} sind gleich lang.

Der Kreis k berührt die Halbkreise über \overline{AB} und \overline{CD} derart, dass die Verbindungsstrecke der Berührungspunkte ein Durchmesser von k ist, der auf der Strecke \overline{AB} senkrecht steht.

Man beweise, dass das Salinon und der Kreis k flächengleich sind.

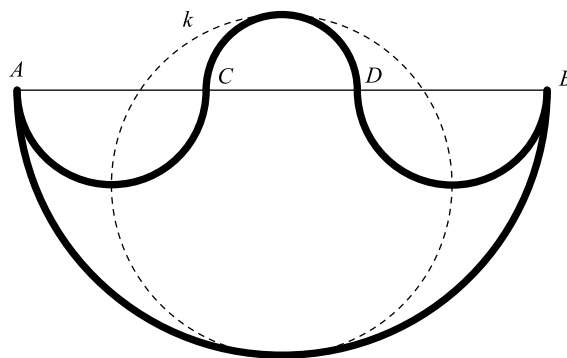


Abbildung A 511322

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

511323

Es sei a eine reelle Zahl. Man ermittle in Abhängigkeit von a alle reellen Zahlen x , die die Gleichung

$$x^3 + a^3 = x^2 - xa + a^2$$

erfüllen.

511324

In einem Fechtturnier mit 2^n Teilnehmern kämpft jeder Fechter genau einmal gegen jeden anderen. Kein Kampf endet unentschieden.

Eine Reporterin möchte nacheinander Einzelinterviews mit $n + 1$ Fechtern führen. Diese sollen so ausgewählt werden, dass jeder interviewte Fechter gegen alle Fechter, die vor ihm interviewt wurden, gesiegt hat.

- a) Man zeige, dass die Reporterin für $n = 1$ und $n = 2$ eine entsprechende Auswahl von Fechtern für die Interviews treffen kann.
- b) Man zeige, dass dies für alle positiven ganzen Zahlen n möglich ist.