

50. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 12–13
Aufgaben – 2. Tag



© 2011 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

501344

In der Ebene sind zwei verschiedene Punkte A und B gegeben.

- a) Man ermittle die Menge M aller derjenigen Punkte C in der Ebene, für die gilt

$$|AC|^2 + |BC|^2 = 2 \cdot |AB|^2.$$

- b) Man untersuche, ob es unter den Winkeln $\sphericalangle ACB$ mit $C \in M$ einen größten gibt, und bestimme gegebenenfalls seinen Wert.

501345

Man entscheide, ob es eine nichtnegative ganze Zahl n gibt, für die $324 + 455^n$ eine Primzahl ist.

501346

Eine Folge $Q_0(x), Q_1(x), \dots$ von Polynomen sei definiert durch

$$Q_0(x) = 1, \quad Q_1(x) = x \quad \text{und} \quad Q_{n+1}(x) = xQ_n(x) + nQ_{n-1}(x) \quad \text{für} \quad n \geq 1.$$

Außerdem sei $p > 2$ eine Primzahl.

Man zeige, dass $Q_p(x) - x^p$ für alle ganzen Zahlen x durch p teilbar ist.