49. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 10
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

491044

Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^3 - y^3 = 1729$ genau vier ganzzahlige Lösungspaare $(x; y)$ hat.

491045

Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit $|BC| > |CA|$. Die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$ schneide die Gerade BC in P und die Gerade CA in Q. Der Fußpunkt des von P auf die Gerade CA gefällten Lotes wird mit R, der Fußpunkt des von Q auf die Gerade BC gefällten Lotes wird mit S bezeichnet.

Zeigen Sie, dass die Punkte R, S und der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$ auf einer Geraden liegen.

491046

Zwei verschiedene, vollständig gekürzte Brüche $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ mit $p, q, r, s > 0$ und $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ seien so gewählt, dass sie folgende Eigenschaft besitzen:

Für jeden Bruch $\frac{x}{y}$ mit $x, y > 0$ und

$$\frac{p}{q} < \frac{x}{y} < \frac{r}{s} \tag{1}$$

gilt $y > \max(q, s)$, der Nenner y ist also sowohl größer als q als auch größer als s.

a) Beweisen Sie, dass $\frac{x}{y} = \frac{p+r}{q+s}$ ein Bruch mit kleinstmöglichem positiven Nenner ist, der (1) erfüllt.

b) Beweisen Sie, dass für Brüche $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ mit dieser Eigenschaft stets $qr - ps = 1$ gilt.