

**49. Mathematik-Olympiade**  
**4. Stufe (Bundesrunde)**  
**Klasse 8**  
**Aufgaben – 1. Tag**



© 2010 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*  
[www.mathematik-olympiaden.de](http://www.mathematik-olympiaden.de). Alle Rechte vorbehalten.

*Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

490841

In drei Gefäßen ist jeweils eine unbekannte Menge Wasser. Man gießt ein Drittel des Wassers aus dem ersten Gefäß in das zweite. Anschließend gießt man ein Viertel des Wassers, das jetzt in dem zweiten Gefäß ist, in das dritte. Schließlich gießt man ein Zehntel des Wassers aus dem dritten Gefäß in das erste. Jetzt befinden sich in jedem Gefäß 9 Liter Wasser, ohne dass dabei Wasser verloren ging.

Ermittle, wie viel Wasser sich in jedem der drei Gefäße befand, bevor umgegossen wurde.

490842

Scheich Abdul al Oila will das Gesamtvermögen seiner Untertanen neu verteilen. Er will die Bürger seines Emirats so in fünf Klassen mit gleich vielen Mitgliedern einteilen lassen, dass die Ärmsten in Klasse 1, die etwas Wohlhabenderen in Klasse 2 und so weiter zusammengefasst werden. Die Reichsten bilden die Klasse 5.

Das Vermögen von jeweils zwei Klassen soll auf folgende Weise angeglichen werden. Man beginnt mit den Vermögen der beiden unteren Klassen 1 und 2. Danach werden das neue Vermögen der Klasse 2 und das (alte) Vermögen der Klasse 3 angeglichen, und so weiter. „Angleichen“ bedeutet dabei, dass das Gesamtvermögen beider Klassen zusammengelegt und dann zu gleichen Teilen auf beide Klassen verteilt wird.

Ein Berater des Scheichs hat Bedenken gegen diese Verteilung. Er schlägt vor, mit den beiden reichsten Klassen zu beginnen. Das jeweilige Angleichen soll dann von oben nach unten erfolgen.

Untersuche, welche dieser Verteilungen für die Klasse der Ärmsten und welche für die der Reichsten günstiger ist.

*Auf der nächsten Seite geht es weiter!*

490843

Die Firma Mathima hat genau  $n$  Mitarbeiter. Die Mitarbeiter bilden untereinander Arbeitsgruppen.

Wenn zwei Arbeitsgruppen keine gemeinsamen Mitarbeiter haben, dann können diese beiden Arbeitsgruppen unabhängig voneinander arbeiten, man sagt auch, sie können parallel arbeiten.

Die Bildung der Arbeitsgruppen aus Mitarbeitern der Firma Mathima soll folgenden Anforderungen genügen:

- (1) Zu je zwei verschiedenen Mitarbeitern gibt es genau eine Arbeitsgruppe, der beide angehören.
  - (2) Zu jeder Arbeitsgruppe gehören mindestens zwei Mitarbeiter.
  - (3) Es gibt mindestens 3 Mitarbeiter, die nicht alle derselben Arbeitsgruppe angehören.
  - (4) Für jeden Mitarbeiter  $P$  und jede Arbeitsgruppe  $g$ , zu der  $P$  nicht gehört, gibt es genau eine Arbeitsgruppe  $h$ , zu der der Mitarbeiter  $P$  gehört und die zur Arbeitsgruppe  $g$  parallel arbeiten kann.
- a) Untersuche, ob Mathima genau 3 Mitarbeiter haben kann.
  - b) Untersuche, ob Mathima genau 4 Mitarbeiter haben kann.
  - c) Untersuche, ob Mathima genau 5 Mitarbeiter haben kann, wenn jede Arbeitsgruppe gleich viele Mitarbeiter hat.

*Hinweis:* Es empfiehlt sich, folgende Bezeichnungen zu verwenden: Die Mitarbeiter werden mit  $P_1, \dots, P_n$  bezeichnet. Die Arbeitsgruppen werden mit  $g_1, \dots, g_m$  bezeichnet. Die Mitarbeiter und die Arbeitsgruppen werden jeweils zu Mengen zusammengefasst:  $\mathcal{P} = \{P_1; \dots; P_n\}$  ist die Menge aller Mitarbeiter;  $\mathcal{G} = \{g_1; \dots; g_m\}$  ist die Menge aller Arbeitsgruppen.