49. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 12–13
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

491331

Man untersuche, ob es ganze Zahlen x und y gibt, für die

$$2010\,x^2 - 2009\,y^2 = 50$$

gilt.

491332

Eine Fabrik besteht aus n Produktionshallen. Zwischen je zwei Produktionshallen existiert genau ein Förderband. Alle Förderbänder sind so konstruiert, dass sie Güter immer nur in eine Richtung transportieren können. Eine Produktionshalle kann auch als Lagerhalle benutzt werden, wenn man Güter von dort in jede andere Produktionshalle über höchstens zwei Förderbänder schicken kann.

Für welche n mit $n > 1$ kann man Fabriken dieses Typs so bauen, dass man jede der n Produktionshallen auch als Lagerhalle benutzen kann?

491333

Im Tetraeder $ABCD$ seien I_A, I_B, I_C und I_D die Inkreismittelpunkte der Flächen BCD, ACD, ABD bzw. ABC. Es seien l_A, l_B, l_C, l_D die Senkrechten durch I_A, I_B, I_C bzw. I_D auf den entsprechenden Flächen.

Man beweise, dass sich l_A, l_B, l_C, l_D genau dann in einem Punkt schneiden, wenn

$$|AB| + |CD| = |AC| + |BD| = |AD| + |BC|$$

gilt.

Hinweis: Ein Tetraeder ist ein von genau vier Dreiecken begrenzter Körper. Diese Dreiecke müssen nicht gleichseitig sein.