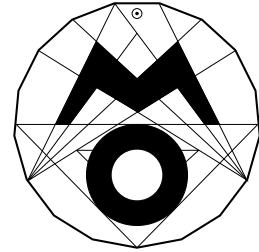


49. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 10
Aufgaben – 2. Tag



© 2010 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

491034

An einem Skilift stehen fünf Männer und drei Frauen, um nach oben zu fahren. Mit dem Lift können immer nur genau zwei Personen (ein Paar) befördert werden, so dass genau vier Fahrten benötigt werden. Die acht Personen steigen in zufälliger Reihenfolge in den Lift ein. Dabei können sowohl gleichgeschlechtliche Paare (zwei Männer oder zwei Frauen) als auch verschiedengeschlechtliche Paare (je ein Mann und eine Frau) entstehen.

- a) Welche Wahrscheinlichkeit ist größer, dass mehr gleichgeschlechtliche Paare auftreten oder dass mehr verschiedengeschlechtliche Paare auftreten?
- b) Ist die Wahrscheinlichkeit, dass die vier zuerst oben angelangten Personen alles Männer sind, größer als die Wahrscheinlichkeit, dass unter den vier zuerst oben angelangten alle drei Frauen sind?

Hinweis: Zufällige Reihenfolge bedeutet, dass alle Reihenfolgen gleich wahrscheinlich sind.

491035

Es seien a, b, c, x und y positive reelle Zahlen.

Zeigen Sie, dass wenigstens eine der Zahlen $\frac{x}{a(b+c)}$ und $\frac{y}{(a+b)c}$ kleiner ist als $\frac{x+y}{(a+c)b}$.

491036

Im Koordinatensystem bezeichnet man Punkte (x, y) mit ganzzahligen Koordinaten x und y als Gitterpunkte. Weiter sei für $n \geq 3$ ein n -Eck gegeben, dessen sämtliche Eckpunkte Gitterpunkte sind. Es bezeichne r die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand des n -Ecks (die Eckpunkte eingeschlossen), i die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren des n -Ecks und F seinen Flächeninhalt. Die *Formel von Pick* besagt nun

$$F = \frac{r}{2} + i - 1.$$

- a) Es seien x, y positive ganze Zahlen. Beweisen Sie die Formel von Pick für das Rechteck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(x, 0)$, (x, y) und $(0, y)$.
- b) Beweisen Sie die Formel von Pick für rechtwinklige Dreiecke, deren Katheten parallel zu den Koordinatenachsen liegen.
- c) Beweisen Sie die Formel von Pick für beliebige Dreiecke.