49. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 9
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

490934

Über eine Menge M sei Folgendes bekannt:

1) Die Menge M ist eine Teilmenge der Menge $\{1, 2, \ldots, 16\}$.
2) Von je drei verschiedenen Zahlen der Menge M besitzen mindestens zwei einen gemeinsamen Teiler größer als 1.

Was ist die maximale Anzahl von Elementen solch einer Menge M?

490935

Es seien a, b, c, x und y positive reelle Zahlen.

Zeigen Sie, dass wenigstens eine der Zahlen $\frac{x}{a\,(b+c)}$ und $\frac{y}{(a+b)\,c}$ kleiner ist als $\frac{x+y}{(a+c)\,b}$.

490936

Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit seinem Umkreis k. Es seien Q der Fußpunkt des Lotes von C auf AB, R der Fußpunkt des Lotes von C auf die Tangente an k durch A, und S der Fußpunkt des Lotes von C auf die Tangente an k durch B.

Beweisen Sie: $|CQ|^2 = |RC| \cdot |CS|$.