49. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 10
Aufgaben

© 2009 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
`www.mathematik-olympiaden.de`. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

491021

a) Ermitteln Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems:

$$4y^2 - x^2 = 2y + x \quad (1)$$
$$3y - x = 4 \quad (2)$$

b) Wir denken uns eine reelle Zahl a und eine positive reelle Zahl b als gewählt. Bestimmen Sie alle Lösungen $(x; y)$ des folgenden Gleichungssystems in Abhängigkeit von a und b.

$$a^2 \cdot y^2 - b^2 \cdot x^2 = a^2 \cdot y + a \cdot b \cdot x \quad (1)$$
$$a \cdot y + 3 \cdot b \cdot x = -a \quad (2)$$

491022

Alf, Barbara, Clara und Danny haben sich gemeinsam eine natürliche Zahl ausgedacht und diese auf einen Zettel geschrieben. Die Klasse soll die Zahl erraten. Dazu macht jede der vier Personen zwei Aussagen über die Zahl. Hier sind die vier Aussagenpaare:

(A1) Die Zahl ist dreistellig.
(A2) Das Produkt aller Ziffern der Zahl beträgt 23.

(B1) Die Zahl ist durch 37 teilbar.
(B2) Die Zahl besteht aus drei gleichen Ziffern.

(C1) Die Zahl ist durch 11 teilbar.
(C2) Die Zahl endet mit einer Null.

(D1) Die Quersumme der Zahl ist größer als 10.
(D2) Die Ziffer an der Hunderterstelle ist weder die kleinste noch die größte der drei Ziffern.

Am Ende verraten A, B, C und D noch, dass von ihren beiden Aussagen jeweils genau eine wahr und genau eine falsch war.

Ermitteln Sie aus diesen Angaben alle Möglichkeiten für die unbekannte Zahl auf dem Zettel.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

491023

In einem Drachenviereck $ABCD$ haben die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ die Länge a und die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ die Länge b. Das Drachenviereck besitze einen Umkreis k (d. h. alle Eckpunkte A, B, C und D liegen auf diesem Kreis k) mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r.

a) Beweisen Sie, dass die Winkel $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle CMD$ gleich groß sind.

b) Leiten Sie eine Formel zur Berechnung des Umkreisradius aus den Längen a und b her.

c) Es wird ein spezielles Drachenviereck $ABCD$ mit der Symmetrieachse $\overline{AC}$ und dem Umkreis k betrachtet. Der Punkt B soll so auf dem Umkreis k liegen, dass eine Parallele zu AC durch diesen Punkt B die Tangente t in B an den Umkreis k ist. Ein Punkt E liege auf der Verlängerung von $\overline{AC}$ über C hinaus so, dass der Flächeninhalt des Vierecks $ABED$ doppelt so groß ist wie der Inhalt des Vierecks $ABCD$.
Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{BE}$ in Abhängigkeit von r.

491024

Bernd möchte die Struktur der echten Brüche (Zahlen der Form $\frac{p}{q}$ mit $0 < p < q$) veranschaulichen und erzeugt dazu ein Bild nach folgendem Vorgehen:

Er beginnt mit $\frac{1}{2}$, dem einzigen echten Bruch mit Nenner 2, setzt fort mit den echten Brüchen mit Nenner 3 $\left(\frac{1}{3} \text{ und } \frac{2}{3}\right)$, dann mit Nenner 4 $\left(\frac{1}{4} \text{ und } \frac{3}{4}; \frac{2}{4} \text{ hatte er schon als } \frac{1}{2} \text{ veranschaulicht – dieser Bruch wird also nicht noch mal eingetragen}\right)$, weiter mit Nenner 5 und immer so fort.

Trägt Bernd eine neue Zahl ein, zeichnet er immer einen Pfeil zu derjenigen Zahl mit kleinerem Nenner, welche der gerade eingetragenen am nächsten liegt. Liegen zwei der bereits eingetragenen Zahlen mit kleinerem Nenner gleich weit entfernt von der neuen Zahl, die anderen aber alle noch weiter, so zeichnet er zwei Pfeile.

a) Erzeugen Sie ein Bild nach Bernds Vorschrift und zeichnen Sie dabei alle echten Brüche bis einschließlich Nenner 7 ein.

b) Bestimmen Sie alle echten Brüche, von denen aus Bernd einen Pfeil zu $\frac{1}{3}$ zeichnet, wenn er sie einträgt. Beachten Sie, dass Bernd nicht bei Nenner 7 aufhört.