49. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 9–10
Aufgaben

Hinweise: 1. *Es stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

491011

Tina und Toni berechnen das Ergebnis einer Aufgabe mit verschiedenen Taschenrechnern. Tina erhält 3,9999999, während Tonis Rechner die Zahl 4 anzeigt. Schnell sind sie sich einig, dass bei Benutzung eines Taschenrechners Rundungsfehler eine Rolle spielen können. Vielleicht stimmt eines der Ergebnisse, vielleicht liegt das richtige Resultat auch dazwischen.

Entscheiden Sie unter Verwendung von Umformungsregeln, welche der folgenden Rechenterme eine natürliche Zahl darstellen.

a) $\left(\sqrt{18}+\sqrt{8}\right)^2$

b) $\left(\sqrt{2}+1\right)^2$

c) $\left(\sqrt{2}+1\right)^{16}$

d) $\sqrt{\left(15+\sqrt{104}\right)\cdot\left(15-\sqrt{104}\right)}$

491012

Finden Sie alle ganzen Zahlen n, für die n^2-3 ein ganzzahliges Vielfaches von $n+3$ ist.

491013

Beweisen Sie:

a) Wenn ein Dreieck gleichschenklig ist, dann sind zwei seiner Höhen gleich lang.

b) Wenn zwei Höhen eines Dreiecks gleich lang sind, dann ist das Dreieck gleichschenklig.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

491014

Bis in die siebziger Jahre des zwanzigsten Jahrhunderts war Schwarz-Weiß-Fernsehen noch recht verbreitet. Daher musste bei den Fußballtrikots der Bundesliga darauf geachtet werden, dass sie schon bezüglich der Helligkeit möglichst gut unterscheidbar waren. Die Helligkeit messen wir auf einer Skala von 0 (schwarz) bis 1 (weiß). Alle Helligkeitswerte zwischen 0 und 1 erschienen dem damaligen Fersehzuschauer als dunkleres oder helleres Grau.

Man will nun 18 Mannschaften mit Trikots (Hemd/Hose) ausstatten. Das Hemd und die Hose einer Mannschaft sollen jeweils einfarbig sein, müssen aber nicht die gleiche Farbe haben. Die Farben sollen so gewählt werden, dass sich bei je zwei unterschiedlichen Trikots wenigstens Hemd oder Hose in der Helligkeit um einen möglichst hohen Wert unterscheiden.

Die kleinste aller Differenzen der Helligkeitswerte zweier benutzter Farben bezeichnen wir mit h.

Wie groß kann h höchstens gewählt werden?

491015

Gegeben ist ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ der Länge $|AB| = 6$. Der Lotfußpunkt von C auf $\overline{AB}$ sei D. Im Inneren von $\overline{CD}$ wird ein beliebiger Punkt P gewählt. M sei der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PD}$. Durch P und M werden Parallelen zur Geraden AB gelegt. Die Schnittpunkte dieser Parallelen mit den Dreiecksseiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ bilden ein Trapez.

Für welche Lage von P ist der Flächeninhalt dieses Trapezes am größten?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

491016

Eine Geheimzahl g soll durch einen Supervisor (Aufseher) an n Personen $P_1, \ldots, P_n$ verschlüsselt mitgeteilt werden, so dass gilt: Erst wenn eine bestimmte Mindestanzahl von Personen zusammenkommt, sollen sie in der Lage sein, die Geheimzahl g zu bestimmen.

a) Die Geheimzahl g sei 2009, die Anzahl der Personen sei $n = 5$. Der Supervisor wählt eine lineare Funktion mit der Gleichung $y = f(x) = 2x + 2009$ und die 5 paarweise verschiedenen reellen Zahlen $x_1 = 10$, $x_2 = 20$, $x_3 = 30$, $x_4 = 40$, $x_5 = 50$. Er teilt jeder Person P_i jeweils die Zahl x_i und den Funktionswert $y_i = f(x_i)$ mit, d. h. P_1 erhält die Zahl $x_1 = 10$ und den Wert $y_1 = 2029$, P_2 erhält $x_2 = 20$ und $y_2 = 2049$ u. s. w. Die konkrete Funktionsgleichung verrät der Supervisor nicht. Jedoch wissen alle Personen, dass eine lineare Funktion f gewählt wurde und dass die Geheimzahl g der Funktionswert von f an der Stelle Null ist.
Wie viele Personen müssen zusammenkommen, damit die Geheimzahl g von ihnen bestimmt werden kann? Und wie kann die Geheimzahl bestimmt werden?

b) Wir betrachten nun den allgemeinen Fall mit n Personen $P_1, \ldots, P_n$. Der Supervisor wählt eine quadratische Funktion und wieder n paarweise verschiedene reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n$. Er teilt jeder Person P_i die Zahl x_i und den Funktionswert $y_i = f(x_i)$ mit. Die Personen wissen, dass eine quadratische Funktion der Form $y = f(x) = a\,x^2 + b\,x + g$ mit $a \neq 0$ gewählt wurde, sie kennen jedoch nicht die konkreten Werte von a und b und erst recht nicht den von g.
Wie viele Personen müssen jetzt zusammenkommen, damit die Geheimzahl g von ihnen bestimmt werden kann und wie können sie die Geheimzahl bestimmen?
Überprüfen Sie zunächst Ihr Verfahren, indem Sie von den Zahlenpaaren

$$(x_i; y_i) \in \{(1; -1), (2; -3), (3; -1), (4; 5), (5; 15), (6; 29)\}$$

die benötigte Anzahl von Paaren auswählen und die durch sie festgelegte Geheimzahl g berechnen.
Weisen Sie dann allgemein nach, dass nach Ihrem Verfahren die Geheimzahl für jede quadratische Funktion eindeutig bestimmt werden kann.