48. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 11–13
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

481311

Drei Kreise mit gleichem Radius schneiden sich so, dass der Mittelpunkt jedes Kreises auf dem Rand der beiden anderen Kreise liegt, siehe Abbildung A 481311.

Man bestimme den Flächeninhalt der grauen Fläche.

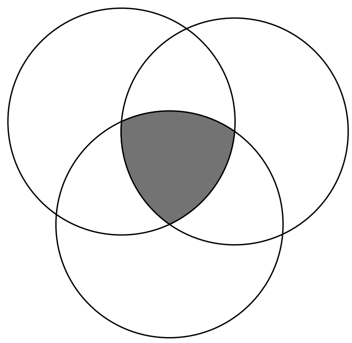

Abbildung A 481311

481312

Man zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ a \cdot x + b \cdot y &= 10 \end{aligned}$$

genau dann reelle Lösungen hat, wenn $a^2 + b^2 \geq 4$.

481313

Andrea und Beate spielen das Rechteckspiel. Dabei beginnen sie mit einem auf Kästchenpapier gezeichneten Rechteck aus $m \times n$ Kästchen als Spielfeld und ziehen abwechselnd, wobei Andrea beginnt.

Ein Zug besteht darin, ein Rechteck aus 2×2, 3×2, 2×3 oder 3×3 Kästchen des Spielfeldes auszuwählen und diese Kästchen einzufärben. Dabei darf das ausgewählte Rechteck keine bereits eingefärbten Kästchen enthalten.

Ist eine Spielerin am Zug und kann keinen Zug gemäß diesen Regeln ausführen, so hat die andere Spielerin gewonnen.

Für alle Paare positiver ganzer Zahlen (m, n) untersuche man, ob eine der beiden Spielerinnen durch eine geeignete Wahl ihrer Spielzüge den Gewinn erzwingen kann. Ist dies der Fall, so gebe man jeweils eine geeignete Vorgehensweise an.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

481314

Eine natürliche Zahl z sei im dekadischen Positionssystem geschrieben 100-stellig,

$$z = \overline{x_1 x_2 \ldots x_{100}}, \qquad x_1 \neq 0,$$

und besitze folgende Eigenschaften (i) und (ii):

(i) Die Ziffern $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ bilden eine monoton fallende Folge,

$$9 \geq x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_{100}.$$

(ii) Quersumme und Querprodukt von z stimmen überein,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{100} = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_{100}.$$

a) Man zeige, dass die Dezimaldarstellung von z mindestens 93 Einsen enthält.

b) Man bestimme alle Zahlen z mit den angegebenen Eigenschaften.