48. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 9–10
Aufgaben

© 2008 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
`www.mathematik-olympiaden.de`. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweise: 1. *Es stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

481011

Zeigen Sie, dass es unendlich viele Beispiele für fünf aufeinander folgende natürliche Zahlen gibt, von denen keine eine Primzahl ist.

481012

Als Polyeder bezeichnet man einen Körper, der von endlich vielen ebenen Seitenflächen begrenzt wird.

Zeigen Sie, dass jedes Polyeder zwei Ecken hat, von denen gleich viele Kanten ausgehen.

481013

Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ mit dem Mittelpunkt M und einem im Inneren der Strecke $\overline{CD}$ liegenden Punkt P. (P fällt also nicht mit C oder D zusammen.) Der Punkt M_1 sei der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ und M_2 der Mittelpunkt von $\overline{AD}$. Die Lotfußpunkte von B auf $\overline{AP}$ sowie von D auf $\overline{AP}$ seien L_1 bzw. L_2.

Bestimmen Sie für jede Lage von P

a) die Größe des Schnittwinkels der Geraden g_1 durch M_1 und L_1 und der Geraden g_2 durch M_2 und L_2,
b) die Größe des Winkels $\sphericalangle L_2ML_1$.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

481014

Gegeben ist ein Dreieck ABC durch die Koordinaten seiner Eckpunkte in einem rechtwinkligen Koordinatensystem: $A(0;0)$, $B(117;44)$, $C(21;72)$.

a) Beweisen Sie, dass das Dreieck rechtwinklig ist.

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S der Seitenhalbierenden, des Höhenschnittpunkts H, des Umkreismittelpunkts U und des Inkreismittelpunkts I.

481015

Zeigen Sie, dass für jede reelle Zahl a die Ungleichung

$$a \leq a^2 + \frac{1}{3} \tag{1}$$

erfüllt ist.

Gibt es reelle Zahlen a, für welche in (1) Gleichheit gilt?

481016

In einem Würfel, der drei Teilwürfel hoch, drei Teilwürfel breit und drei Teilwürfel lang ist, schlüpft in der Mitte eines Teilwürfels eine Raupe. Diese frisst sich nun jeweils von der Mitte eines Teilwürfels kantenparallel bis zur Mitte eines benachbarten Teilwürfels durch, wo sie sich entweder häutet oder verpuppt. (Dabei heißen zwei Teilwürfel genau dann benachbart, wenn sie eine gemeinsame Seitenfläche haben.) Nach jeder ihrer Häutungen ändert sie ihre Richtung und setzt die Reise fort.

Insgesamt häutet sich die Raupe 25-mal, bevor sie sich verpuppt und so ihre Reise beendet.

Man beweise, dass es einen Teilwürfel gibt, in dem die Raupe nicht gewesen ist.