**48. Mathematik-Olympiade**
**1. Stufe (Schulstufe)**
**Klasse 6**
**Aufgaben**



<u>Hinweis:</u> *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen bzw. Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

<u>480611</u>

Ilke spielt mit Zahlen. Sie wählt sich eine Zahl, multipliziert sie mit 3, addiert zum Ergebnis 3, teilt das neue Ergebnis durch 3 und zieht schließlich von diesem Resultat 3 ab. Dann möchte sie von vorn anfangen.

„Eigentlich,“ so überlegt sie, „müsste ich nach diesen vier Rechnungen wieder bei der Anfangszahl ankommen. Aber wenn ich mit 5 angefangen habe, dann lande ich bei 3. Und wenn ich bei 7 anfange, lande ich bei ... ähhh...“

a) Wo landet Ilke, wenn sie bei 7 anfängt?
b) Was passiert, wenn Ilke mit größeren Zahlen anfängt – vielleicht schafft sie dann ihr ursprüngliches Ziel?
c) „Vielleicht sollte ich anders herum arbeiten“, denkt Ilke laut. „Erst mal 3, dann minus 3, dann geteilt durch 3, dann plus 3.“ Was geschieht jetzt?
d) Welche allgemeinen Aussagen kannst du machen, wenn du die vier Rechenoperationen $+$, $\cdot$, -und : hintereinander so ausführst, dass du abwechselnd Punktrechnung und Strichrechnung verwendest?

<u>480612</u>

Christian erklärt Sarah , dass es *arme* und *reiche* Zahlen gibt. „*Arm* ist eine Zahl, wenn die Summe der echten Teiler kleiner als die Zahl selbst ist. *Reich* ist eine Zahl, wenn die Summe der echten Teiler größer als die Zahl selbst ist.“ Dazu muss man wissen, was ***Teiler*** und ***echte Teiler*** einer Zahl sind. An Beispielen versteht man sofort, was ***Teiler*** sind:

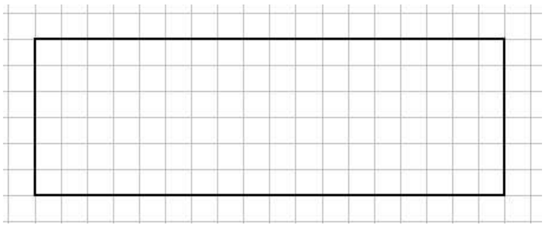
- 3 ist ein Teiler von 15, weil man 15 durch 3 ohne Rest teilen kann.
- 14 ist kein Teiler von 35, weil man 35 nicht ohne Rest durch 14 teilen kann.
- Aber auch: 1 ist ein Teiler von 7, weil man 7 ohne Rest durch 1 teilen kann.
- Und natürlich ist jede Zahl von sich selbst Teiler!

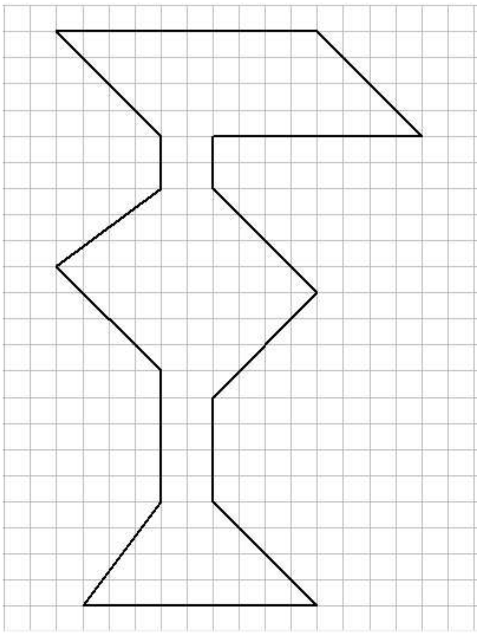
Die ***echten Teiler*** einer Zahl sind alle Teiler außer der 1 und der Zahl selbst. (Beispiel: 30 hat die ***Teiler*** 1, 2, 3, 5, 10, 15 und 30 und die ***echten Teiler*** 2, 3, 5, 6, 10 und 15. Die Summe der echten Teiler der 30 ist dann 41.)

a) Sarah fragt: „Gibt es unter den Zahlen 9, 16, 18, 20, 25 und 36 *reiche* Zahlen?“
b) Sarah fordert nun Christian auf, unter den Zahlen von 1 bis 99 die kleinste und die größte *reiche* Zahl zu finden. (Achtung! Es ist die größte reiche Zahl gesucht, nicht die „*reichste*“!)
c) Sarah stellt fest: „Primzahlen sind die *ärmsten* Zahlen!“ Stimmt das?

*Auf der nächsten Seite geht es weiter!*

480613





In einer Quizfrage gab es 300 Punkte für die schnelle Beantwortung der Frage: Welche der beiden Figuren hat den größeren Flächeninhalt, das Rechteck oder die rechte Figur, das Große $F$?
Die richtige Antwort wurde tatsächlich schnell gegeben: Das Große $F$ hat den größeren Flächeninhalt.

a) Um wie viele Kästchen ist der Flächeninhalt des Großen $F$s größer als der des Rechtecks?
b) Zerlege das Große $F$ so, dass man aus den erhaltenen Teilen das Rechteck legen kann und nur zwei Teile übrig bleiben. Versuche, mit möglichst wenigen Teilen auszukommen.
c) Stell' dir vor, dass aus neun der Großen $F$s neun Rechtecke gelegt wurden.
Lässt sich dann aus den Reststücken noch einmal dieses Rechteck legen? Geht es ohne zusätzliche Schnitte?

480614

Bei einem 10 000-m-Lauf im Stadion wird die Bahn, die ja 400 m lang ist, 25-mal umrundet. Im Vorlauf treten vier Läufer an. Sie starten auch gleichzeitig.

- Läufer $A$ will ganz gleichmäßig laufen, jede Runde in 80 Sekunden.
- Läufer $B$ sagt sich: Die ersten 13 Runden laufe ich 85 Sekunden pro Runde, dann werde ich schneller und laufe die letzten 12 Runden in je 75 Sekunden.
- Läufer $C$ plant: Die erste Runde in 90 Sekunden und dann jede Runde eine Sekunde schneller als die Runde zuvor.
- Läufer $D$ schließlich hat einen raffinierten Plan: Egal wer führt, ich will in jeder Runde grundsätzlich genau zwei Sekunden langsamer als der Führende laufen, und in der letzten Runde drehe ich mächtig auf und laufe sie in 60 Sekunden.

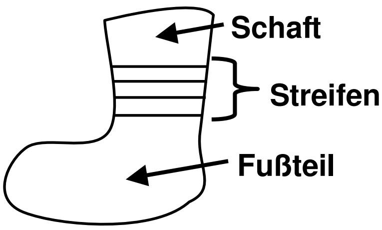
a) Wer gewinnt – und in welcher Zeit?
b) Übrigens: Der Letzte wird nicht in den Endlauf kommen. Wer ist es?
c) Gab es Überrundungen?

*Vorschlag*: Fertige eine Tabelle an, in der für jede der 25 Runden eingetragen wird, wie am Ende der Runde die Zeiten der Läufer sind und wer am Ende der Runde vor wem führt.

*Auf der nächsten Seite geht es weiter!*

480615

Oma Streifstrumpf strickt für Peppi neue Socken. Peppi hat drei Lieblingsfarben und zwar rot, gelb und blau, die alle in den drei Streifen vorkommen sollen.




a) Die Oma hat Wolle in diesen drei Farben gekauft. Sie überlegt, wie der Streifenteil aussehen kann. Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat die Oma Streifstrumpf dafür?

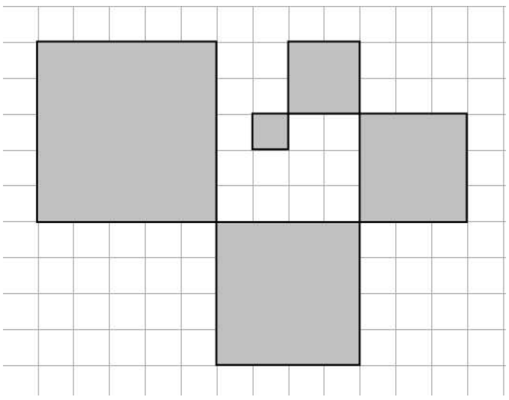
b) Fußteil und Schaft sollen jetzt die gleiche Farbe bekommen, aber die drei Streifen sollen erkennbar sein. Wie viele verschiedene Socken kann die Oma aus den drei Farben jetzt stricken?

c) Peppi entdeckt noch lila Wolle in Omas Strickkiste, und sie möchte jetzt Socken mit vier Streifen mit den vier Farben lila, rot, gelb und blau. Oma weiß, dass die Socken von Peppi immer ziemlich dreckig werden und will Fußteil und Schaft nun in schwarz stricken. Diese Wollfarbe hat sie immer in ihrer Strickkiste.
Wie viele verschiedene Socken könnte die Oma jetzt für Peppi stricken?

d) Peppi wird jetzt noch anspruchsvoller. Sie sagt: „Gut, Oma, der Fußteil kann schwarz sein. Aber dann bitte nur drei Streifen und den Schaft. Und diese Teile aus den vier Farben rot, gelb, blau und lila. Und, bitte, immer da, wo etwas aneinander stößt, wechsle die Farbe.“ Oma seufzt und denkt nach… Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat sie jetzt?

480616

In dieser Aufgabe geht es darum, immer größer werdende Quadrate an den Ecken zu verbinden. Wir beginnen mit einem Quadrat, das nur ein Kästchen groß ist. An dessen rechte obere Ecke zeichnen wir ein Quadrat, das aus 2×2 Kästchen besteht (wir nennen dies ein (2×2)-Quadrat). Dann zeichnen wir an dessen rechter unterer Ecke ein (3×3)-Quadrat an, an dessen linker unterer Ecke ein (4×4)-Quadrat und fahren so fort.



Die rechtsstehende Abbildung zeigt das Ergebnis bis zum (5×5)-Quadrat.

a) Führe die Zeichnung bis zum zehnten Schritt, also bis zum (10×10)-Quadrat, fort.

b) Ab dem siebenten Schritt beginnen die Quadrate einander zu überschneiden.
   - Wie viele Kästchen umfasst die Überschneidungsfläche nach dem 7. Schritt?
   - Wie viele Kästchen kommen im 8. Schritt hinzu?
   - Wie viele Kästchen umfasst die gesamte Überschneidungsfläche nach dem 9. und dem 10. Schritt?
   - Halte die erhaltenen Resultate übersichtlich in Form einer Tabelle fest. Welche Gesetzmäßigkeit kannst du erkennen?
   - Nach dem wievielten Schritt überschreitet die Anzahl der Kästchen der Überschneidungsfläche zum ersten Mal die Zahl 500?

*Auf der nächsten Seite geht es weiter!*

c) Jetzt packen wir die Quadrate in ein Rechteck. Der obigen Zeichnung ist zu entnehmen, dass das kleinste Rechteck, das man um die Figur bis zum ($5\times5$)-Quadrat legen kann, ein ($9\times12$)-Rechteck ist.
Ermittle für $n = 6, 7, 8$ die Seitenlängen des jeweils kleinsten Rechtecks, das man um die Figur bis zum ($n\times n$)-Quadrat legen kann, und halte die erhaltenen Resultate in einer Tabelle fest.
Entdecke eine Gesetzmäßigkeit, die es gestattet, die Seitenlängen eines solchen Rechtecks für weitere Zahlen $n$ zu berechnen.
Überprüfe die Gültigkeit der vermuteten Gesetzmäßigkeit für $n = 10$ anhand der angefertigten Zeichnung.
Welche Seitenlängen hat das kleinste Rechteck, das man um die Figur bis zum ($100\times100$)-Quadrat legen kann?