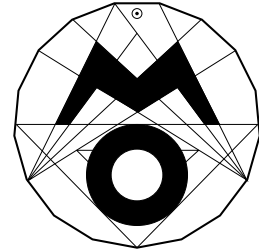


47. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 11–13
Aufgaben – 2. Tag



© 2008 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

471344

Man ermittle die kleinste Konstante C so, dass für alle reellen Zahlen x und y gilt

$$1 + (x + y)^2 \leq C(1 + x^2)(1 + y^2). \quad (1)$$

471345

Innerhalb eines Quadrates mit der Seitenlänge 1 befinden sich endlich viele Kreisscheiben, die sich auch überlappen dürfen. Die Summe aller Kreisumfänge sei gleich 10. Man beweise, dass es eine Gerade gibt, die mindestens vier dieser Kreise schneidet oder berührt.

471346

Man bestimme alle reellen Zahlen x , für die die beiden Zahlen

$$4x^5 - 7 \quad \text{und} \quad 4x^{13} - 7$$

gleichzeitig Quadratzahlen sind.