47. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 11–13
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

471334

Man bestimme alle Tripel reeller Zahlen $(x; y; z)$, die folgendes Gleichungssystem erfüllen:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (1)$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = 1. \quad (2)$$

471335

Das Dreieck ABC sei rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei B. Der Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt M_1 und dem Radius r_1 sei der Inkreis des Dreiecks ABC. Der Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt M_2 und dem Radius r_2 liege außerhalb des Dreiecks ABC und berühre die Strecke $\overline{BC}$ sowie die Geraden AB und AC.

Man beweise,

a) dass das Dreieck M_1M_2C gleichschenklig und rechtwinklig ist,
b) dass die Summe der Radien der Kreise k_1 und k_2 gleich der Länge der Strecke $\overline{BC}$ ist.

471336

Aus den sieben Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 werden im Dezimalsystem sieben siebenstellige Zahlen so gebildet, dass jede Zahl sämtliche dieser Ziffern enthält.

Man beweise, dass es unmöglich ist, aus diesen Zahlen einige so auszuwählen, dass die Summe ihrer siebten Potenzen mit der Summe der siebten Potenzen der verbleibenden Zahlen übereinstimmt.