47. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 10
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

471034

a) Zeigen Sie, dass es keine positive ganze Zahl n gibt, so dass $2^n + 1$ durch 7 teilbar ist.

b) Es sei nun eine beliebige positive ganze Zahl $k \geq 3$ vorgegeben. Zeigen Sie, dass es keine positive ganze Zahl n gibt, so dass $2^n + 1$ durch $2^k - 1$ teilbar ist.

471035

Über einer Strecke $\overline{AB}$ seien auf beiden Seiten Viertelkreisbögen errichtet (siehe nebenstehende Abbildung A 471035). Die Fläche, die von diesen zwei Kreisbögen umschlossen wird, sei mit $\mathcal{F}$ bezeichnet. Zu einem Punkt P sei $\mathcal{F}_P$ das Bild von $\mathcal{F}$ nach Drehung um P um 90° gegen den Uhrzeigersinn.

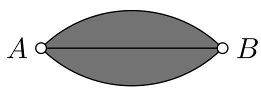

Abbildung A 471035

Zeigen Sie, dass die Menge aller Punkte P, für welche sich die Flächen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}_P$ von außen berühren, mit der Kreislinie k mit dem Durchmesser $\overline{AB}$ zusammenfällt.

Hinweis: Zwei Figuren berühren sich, wenn sie keine gemeinsamen inneren Punkte, aber mindestens einen gemeinsamen Punkt auf den Randlinien haben.

471036

Wir wollen im Folgenden untersuchen, ob es eine für alle reellen Zahlen definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, die für alle reellen Zahlen $x \notin \{-1, 0\}$ der Gleichung

$$\frac{1}{1+x} \cdot f\left(\frac{1+x}{x}\right) + f(1+x) = 1 \qquad (1)$$

genügt.

a) Angenommen, es gibt eine solche Funktion. Bestimmen Sie $f(2)$.

b) Bestimmen Sie die Werte von $f(3)$ und $f\left(\frac{3}{2}\right)$.

Hinweis: Überlegen Sie, welche Werte man für x einsetzen kann, damit in der Funktionalgleichung der Term $f(3)$ vorkommt.

c) Beweisen Sie, dass es eine Funktion f mit den oben beschriebenen Eigenschaften gibt.