46. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 12–13
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

461344

Die Suche nach dem IMO-Logo geht weiter. Vorgeschlagen wird ein Dreieck, bei dem die Innenwinkel eine arithmetische und die Längen der diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten eine geometrische Folge bilden. Man bestimme alle derartigen Dreiecke.

461345

Man bestimme alle Mengen M reeller Zahlen mit den Eigenschaften (1) und (2).

(1) Die Menge M ist endlich und enthält mindestens zwei Elemente.
(2) Je zwei Elemente aus M gehören zu einer arithmetischen Folge dreier Elemente aus M.

461346

Für zwei gegebene reelle Zahlen a und b habe die Gleichung

$$x^4 - ax^3 + 6x^2 - bx + 1 = 0 \tag{1}$$

vier (nicht notwendig voneinander verschiedene) reelle Lösungen. Man beweise, dass dann

$$a^2 + b^2 \geq 32 \tag{2}$$

gilt.