46. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 8
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

460844

Jonas und Amelie ziehen Spielsteine auf einem kreisförmigen Spielbrett, das in n gleich große Sektoren unterteilt ist. Zuerst zieht Jonas vom Startfeld aus fünf Felder vor, dann bewegt Amelie ihren Stein vom Startfeld aus sieben Felder vor, dann zieht wieder Jonas fünf Felder vor, Amelie rückt sieben Felder weiter und so fort. Wer zuerst wieder auf dem Startfeld stehen bleibt, hat gewonnen.

a) Welcher Spieler gewinnt, wenn $n = 12$ gilt?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Jonas das Spiel, wenn für n eine beliebige zweistellige ganze Zahl zufällig ausgewählt wird?

Hinweis: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist definiert als Quotient aus der Anzahl der für das Ereignis *günstigen* Ergebnisse und der Anzahl der *möglichen* Ergebnisse.

460845

Es seien ABC ein nicht rechtwinkliges Dreieck und k sein Umkreis. Es sei D der Schnittpunkt der Tangente t_A an den Kreis k im Punkt A mit der Tangente t_B an k in B. Die Parallele t'_C zur Tangente t_C an den Kreis k im Punkt C durch den Punkt D schneide die Gerade durch die Punkte A und C im Punkt B' und die Gerade durch B und C im Punkt A'.

Beweise, dass es unter diesen Voraussetzungen einen Kreis gibt, der durch A, B, A' und B' geht.

460846

Beweise folgende Aussagen:

a) Die Zahl $x = (4!) \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$ ist durch 5 teilbar.

b) Die Zahl $y = (2006!) \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2005} + \frac{1}{2006}\right)$ ist durch 2007 teilbar.

Hinweis: Es bezeichnet $n!$ (gesprochen „n Fakultät“) das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen, also $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$.