46. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 11
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

461134

Im Jahr 2009 wird die Internationale Mathematik-Olympiade in Deutschland stattfinden. Als Logo wird ein Rechteck $ABCD$ der Größe 5×10 vorgeschlagen, das von einer Geraden geteilt wird, die durch den Eckpunkt A und einen Punkt P auf der längeren Rechteckseite $\overline{BC}$ verläuft. In jedem der beiden Teile befindet sich ein Quadrat, von dem zwei Seiten auf den Rechteckseiten und der gegenüberliegende Eckpunkt auf der Geraden liegen (siehe nebenstehende Abbildung A 461134).
Man bestimme das Teilverhältnis $|PC| : |PB|$ so, dass die Flächeninhalte der Quadrate im Verhältnis $2 : 1$ stehen.

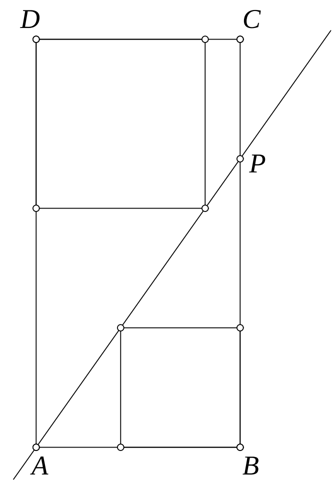

Abbildung A 461134

461135

Ein Winzer möchte Wein abmessen, indem er Wein aus Kanistern mit einem Inhalt von 5, 6 und 7 Litern in ein großes Fass füllt.

a) Man zeige, dass er so für jede ganze Zahl $n \geq 10$ genau n Liter abmessen kann.

b) Um effektiv zu arbeiten, will der Winzer mit möglichst wenigen Füllungen auskommen. Man beweise: Hat der Winzer die beiden kleineren Kanister zusammen nicht mehr als dreimal verwendet, war seine Arbeit effektiv.

c) Man zeige, dass der Winzer nicht effektiv arbeitet, wenn er die beiden kleineren Kanister zusammen mehr als sechsmal verwendet.

461136

Gegeben sei die Gleichung

$$p^2 + q^3 = r^4. \qquad (1)$$

a) Man finde ein Lösungstripel $(p; q; r)$ der Gleichung (1) mit positiven ganzen Zahlen p, q, r.

b) Unter der Voraussetzung der Existenz einer Lösung zeige man, dass die Gleichung (1) dann sogar unendlich viele Lösungstripel $(p; q; r)$ mit positiven ganzen Zahlen p, q, r besitzt.