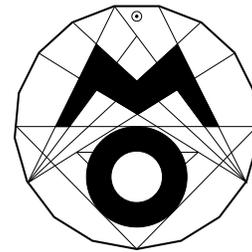


46. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 10
Aufgaben – 1. Tag



© 2007 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

461031

Die aufsteigende Folge (a_n) mit

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 4, \quad a_4 = 9, \quad a_5 = 10, \quad a_6 = 12, \quad a_7 = 13, \quad \dots$$

besteht aus allen positiven ganzen Zahlen, welche eine Dreier-Potenz oder eine Summe von verschiedenen Dreier-Potenzen sind.

Finden Sie das hundertste Glied a_{100} dieser Folge.

461032

Gegeben ist die von reellen Parametern a, b abhängende Gleichung

$$x^3 - 3abx - (a^3 + b^3) = 0. \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie reelle Zahlen a, b so, dass sich

$$x^3 + x + 1 = 0 \tag{2}$$

als Spezialfall der Gleichung (1) ergibt, d. h. dass man nach Einsetzen der Werte für a und b in die linke Seite von (1) und Zusammenfassen die linke Seite von (2) erhält.

b) Bekanntlich hat jede Gleichung dritten Grades wenigstens eine reelle Lösung. Finden Sie eine Formel für eine reelle Lösung x der Gleichung (1) in Abhängigkeit von a und b .

461033

Gegeben ist ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r sowie eine reelle Zahl h mit $0 < h < 2r$. Wir betrachten Trapeze $ABCD$, deren Eckpunkte auf k liegen und deren parallele Seiten \overline{AB} und \overline{CD} den Abstand h haben.

Finden Sie unter all diesen Trapezen eines mit größtmöglichem Flächeninhalt.