46. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 9
Aufgaben – 2. Tag

© 2007 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
`www.mathematik-olympiaden.de`. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

460934

Es seien p und q zwei Primzahlen mit $2 < p < q$, zwischen denen keine weitere Primzahl liegt. Zeigen Sie, dass sich $p + q$ in ein Produkt von mindestens drei echten Faktoren zerlegen lässt.

Beispiele: $3 + 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, $7 + 11 = 2 \cdot 3 \cdot 3$.

Hinweis: Als *echten* Faktor einer natürlichen Zahl N bezeichnet man einen Teiler d von N mit $1 < d < N$.

460935

Wählt man reelle Zahlen x und y und setzt diese Werte in den Term

$$2x^2 + 4y^2 - 4xy - 4y + 3$$

ein, so erhält man (nach der Berechnung) eine reelle Zahl, die im Folgenden $T(x, y)$ genannt wird, also

$$T(x, y) = 2x^2 + 4y^2 - 4xy - 4y + 3\,.$$

a) Zeigen Sie: Wählt man y halb so groß wie x, dann gilt $T(x, y) = (x - 1)^2 + 2$.

b) Beweisen Sie: Wählt man x und y gleich groß, dann kann $T(x, y)$ nicht negativ werden.

c) Bestimmen Sie den kleinsten Wert von $T(x, y)$, den man erreichen kann! Beweisen Sie Ihre Behauptung und geben Sie alle Paare (x, y) an, für die man diesen kleinsten Wert erhält!

460936

Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC. Der Höhenschnittpunkt dieses Dreiecks sei H.

Beweisen Sie, dass es vier Kreise gleicher Radiuslänge mit den Mittelpunkten A, B, C und H gibt, von denen sich je drei in einem Punkt schneiden.