46. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 7
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen bzw. Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

460731

Der Archäologe Otto Findig ist auf der Suche nach einem verschütteten Tempel. Von einem stummen Mönch hat er ein altes Dokument erhalten, das ihm dabei den Weg weisen soll. Es enthält die folgenden verschlüsselten Anweisungen:

„Gehe über drei Brücken. Hinter jeder überquerten Brücke ist eine Weggabelung, bei der man nach rechts, nach links oder geradeaus gehen kann. Jede der genannten Richtungen darf aber nur genau einmal eingeschlagen werden. Bedenke außerdem:

(1) Gehe nach der ersten Brücke nach rechts.
(2) Gehe nach der zweiten Brücke nicht nach rechts.
(3) Gehe nach der dritten Brücke nicht nach links.

Merke aber: Von den drei Aussagen sind genau zwei falsch".

Zeige: Otto Findig kann mit diesen Hinweisen den Tempel eindeutig finden. Gib an, wie er gehen muss, um auf den Tempel zu stoßen.

460732

Ermittle alle natürlichen Zahlen z, die die vier folgenden Bedingungen (1), (2), (3) und (4) erfüllen:

(1) Die Zahl z ist fünfstellig.
(2) Die Ziffern von z sind voneinander verschieden.
(3) Die Zahl z hat die Quersumme 10.
(4) Addiert man zu z ihre Spiegelzahl $\overline{z}$, dann hat die entstandene Zahl nur gleiche Ziffern.

Hinweis: Die Spiegelzahl einer Zahl besteht aus den gleichen Ziffern wie die Zahl, jedoch in umgekehrter Reihenfolge. Bei ihr ist, anders als bei der Zahl z selbst, auch die 0 als Anfangsziffer zugelassen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

460733

Wir betrachten gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke ABC mit dem rechten Winkel in C und dem Mittelpunkt M der Seite $\overline{AB}$.

a) Es seien F der Fußpunkt des Lotes von M auf $\overline{BC}$ und G der Fußpunkt des Lotes von M auf $\overline{AC}$.
Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen folgt: Die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke AMG und MBF ist halb so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

b) Es seien P ein beliebiger Punkt auf $\overline{AB}$, D der Fußpunkt des Lotes von P auf $\overline{BC}$ und E der Fußpunkt des Lotes von P auf $\overline{AC}$.
Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen folgt: Die Rechtecke $PDCE$ haben alle denselben Umfang.

c) Es seien P ein beliebiger, von M verschiedener Punkt auf $\overline{AB}$, D der Fußpunkt des Lotes von P auf $\overline{BC}$ und E der Fußpunkt des Lotes von P auf $\overline{AC}$.
Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen folgt: Die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke APE und PBD ist größer als die Hälfte des Flächeninhalts des Dreiecks ABC.