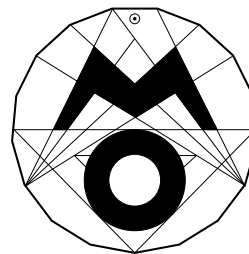


46. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 8
Aufgaben



© 2006 Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen bzw. Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.

460811

Wenn in einen Wasserbehälter in jeder Minute 4 Liter Wasser fließen, so werden nach einer gewissen Zeit noch 60 Liter fehlen, bis der Wasserbehälter voll ist. Wenn dagegen pro Minute 6 Liter hineinfließen, so werden nach derselben Zeit schon 10 Liter übergelaufen sein.

Wie viel Liter fasst der Wasserbehälter?

460812

Die Oberflächeninhalte zweier Würfel mit ganzzahligen Kantenlängen, von denen der größere eine um 22 cm längere Kante als der kleinere hat, unterscheiden sich um $19\,272\text{ cm}^2$ voneinander.

- Berechne die Länge der Kanten der beiden Würfel.
- Ermittle alle Lösungen, wenn man die Bedingung weglässt, dass die Differenz der Kantenlängen 22 cm betragen soll.

460813

Bernd soll große Zahlen in Primfaktoren zerlegen. Er kennt Teilbarkeitsregeln für die Primfaktoren 2, 3, 5 und 11, aber keine für 7. „Ich kenne eine, verstehe sie aber nicht“, sagt ihm sein Freund Rolf: „Nimm an, du hast eine sechsstellige Zahl z aus den Ziffern a, b, c, d, e und f , also $z = \overline{abcdef}$. Trenne die vorderen 3 Ziffern abc ab und schreibe sie unter die letzten 3 Ziffern. Subtrahiere die beiden so erhaltenen dreistelligen Zahlen so voneinander, dass eine nicht negative Differenz entsteht (d. h. betrachte den Betrag dieser Differenz). Ist diese Differenz durch 7 teilbar, dann trifft dies auch auf z zu. Natürlich klappt das Verfahren auch für fünf- und für vierstellige Zahlen, wenn man $a = 0$ bzw. $a = 0$ und $b = 0$ setzt“.

Bernd überlegt: „Doch, ich habe eine Erklärung: 1001 ist durch 7 teilbar.“

- Überprüfe an drei selbst gewählten Beispielen, ob das Verfahren zum richtigen Ergebnis führt und ob es auch für vierstellige und fünfstellige Zahlen anwendbar ist.
- Beweise, dass jede Zahl der Form \overline{abcabc} durch 7 teilbar ist.
- Erkläre damit das von Rolf beschriebene Verfahren.
- Gibt es ein ähnliches Verfahren für den Primfaktor 13? Wenn ja, dann gib das Verfahren an.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

Es sei $ABCD$ ein Viereck, das folgende Bedingungen erfüllt:

- (1) $ABCD$ ist ein Drachenviereck (mit der Symmetrieachse AC).
- (2) Die Diagonale \overline{AC} hat eine Länge von 7 cm.
- (3) Der Winkel $\sphericalangle BAD$ ist 60° groß.
- (4) Die Summe der Seitenlängen von \overline{AB} und \overline{BC} beträgt 10 cm.

- a) Konstruiere ein Viereck $ABCD$, das diese Bedingungen erfüllt.
- b) Beschreibe deine Konstruktion.

Hinweis: Überzeuge dich, dass die Aufgabe viel leichter wird, wenn man die Bedingung (4) durch folgende Bedingung (4') ersetzt:

- (4') Die Seite \overline{AB} ist 6 cm lang.

Die Schwierigkeit unserer Aufgabe liegt darin, dass keine der Streckenlängen $|AB|$ oder $|BC|$, sondern nur deren Summe gegeben ist. In einem solchen Fall ist es günstig, eine Hilfsstrecke mit dieser Länge einzuführen, die als Seite eines Hilfsdreiecks vorkommt, das sich konstruieren lässt.

Zusatzaufgabe für interessierte Schülerinnen und Schüler: Zur vollständigen Lösung einer Konstruktionsaufgabe gehört auch der Beweis der folgenden beiden Sätze:

- (I) Wenn ein Viereck die gestellten Bedingungen erfüllt, dann lässt es sich wie beschrieben konstruieren (*Einzigkeitsnachweis*).
- (II) Wenn ein Viereck wie beschrieben konstruiert wurde, dann erfüllt es die gestellten Bedingungen (*Existenznachweis*).

Beweise diese beiden Sätze.