45. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 11–13
Aufgaben – 2. Tag

© 2006 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

451344

Im Inneren eines Dreiecks ABC liege ein Punkt D derart, dass sowohl $|AC| - |AD| \geq 1$ als auch $|BC| - |BD| \geq 1$ gilt. Man beweise, dass dann für jeden Punkt E der Strecke $\overline{AB}$ gilt

$$|EC| - |ED| \geq 1.$$

451345

Eine von null verschiedene reelle Zahl x erfülle die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, wobei a, b und c ganze Zahlen mit $|a| + |b| + |c| > 1$ seien. Man zeige, dass dann

$$|x| \geq \frac{1}{|a| + |b| + |c| - 1}$$

gilt.

451346

Ein Kreis durch die Ecken B, C eines Dreiecks ABC schneide die Seiten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ in den Punkten Y, Z. Es sei P der Schnittpunkt von BZ mit CY und X der Schnittpunkt von AP mit BC.

Sei M der von X verschiedene Schnittpunkt des Umkreises von $\triangle XYZ$ mit BC. Man beweise, dass M Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ ist.