45. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 10
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

451044

In jeder der folgenden beiden Summen sind die Sterne $*$ durch die Ziffern von 1 bis 9 so zu ersetzen, dass jede Ziffer genau einmal benutzt wird und eine korrekte Rechnung entsteht.

$$\begin{array}{cccc} & * & * & * \\ & * & * & * \\ + & * & * & * \\ \hline & 9 & 9 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & * & * & * \\ & * & * & * \\ + & * & * & * \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Bestimmen Sie jeweils die Anzahl aller Lösungen!

451045

In der Zeichenebene sei eine Folge $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ von Punkten derart gegeben, dass gilt:

- Für alle positiven ganzen Zahlen i hat das Dreieck $D_i = A_iA_{i+1}A_{i+2}$ einen rechten Winkel bei A_{i+2}.
- Der Punkt A_{i+3} liegt im Inneren der Strecke $\overline{A_iA_{i+1}}$.

Wie kann man in endlich vielen Konstruktionsschritten aus den Punkten A_1, A_2 und A_3 alle Punkte konstruieren, die im Inneren jedes der Dreiecke D_i $(i = 1, 2, \ldots)$ liegen?

451046

Bestimmen Sie alle reellen Tripel $(x; y; z)$, welche Lösungen des folgenden Gleichungssystems sind:

$$x + y + \frac{1}{z} = 3$$
$$y + z + \frac{1}{x} = 3$$
$$z + x + \frac{1}{y} = 3.$$