45. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 8
Aufgaben – 2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

450844

Wir betrachten Quadrate, die in neun kleinere, untereinander kongruente Quadrate unterteilt sind. In diese Quadrate werden die natürlichen Zahlen von 1 bis 9 eingetragen, zum Beispiel wie in Abbildung A 450844 a.

In derartige Quadrate lassen sich auf verschiedene Weise „(2×2)-Quadrate“ einzeichnen, zum Beispiel wie in Abbildung A 450844 b. Nun bilde man die Summe S der dort eingetragenen vier Zahlen. In unserem Beispiel erhält man $S = 2 + 9 + 5 + 4 = 20$.

Zeige, dass es unter den „(2×2)-Quadraten“ unabhängig davon, wie man die neun Zahlen anfangs eingetragen hat, stets eines gibt, dessen Summe S größer oder gleich 16 ist.

1	7	8
2	9	3
5	4	6

Abbildung A 450844 a

1	7	8
2	9	3
5	4	6

Abbildung A 450844 b

450845

Als *erste* Quersumme $Q_1(n)$ einer natürlichen Zahl n sei die in bekannter Weise gebildete Quersumme verstanden. Ist $Q_1(n)$ eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, dann sei deren Quersumme als *zweite* Quersumme $Q_2(n)$ bezeichnet. Entsprechend wird $Q_3(n)$ definiert.

a) Ermittle die kleinste Zahl n, für die $Q_3(n) = 11$ gilt.

b) Ermittle die größte Zahl, die als *dritte* Quersumme einer 2005-stelligen Zahl auftreten kann und gib die kleinste 2005-stellige Zahl an, die diese maximale dritte Quersumme besitzt.

c) Ermittle $Q_3(3^{1000})$, wobei vorausgesetzt wird, dass die Zahl $z = 3^{1000}$ genau 478 Ziffern besitzt.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

450846

Gegeben sei ein Kreissektor, der von zwei Radien $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$ sowie dem Bogen AB begrenzt wird.

a) Es werde vorausgesetzt, dass die Radien $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$ aufeinander senkrecht stehen. Von einem beliebigen Punkt P des Kreisbogens AB werden die Lote auf $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$ gezeichnet.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Verbindungsstrecken der Lotfußpunkte für alle Punkte P des Kreisbogens gleich lang sind und ermittle deren Länge.

b) Beweise: Auch unter der Voraussetzung, dass die Radien $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$ einen spitzen Winkel einschließen, sind die Verbindungsstrecken der Lotfußpunkte für alle Punkte P des Kreisbogens gleich lang.