45. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 8
Aufgaben – 1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

450841

Löse folgende Aufgabe, die einem alten Rechenbuch entnommen wurde:

Von zwei Kapitalien trägt das eine 80 Gulden Jahreszins, das andere bei gleichem Zinssatz 100 Gulden Jahreszins. Wird nun das erste Kapital zu 3,5 %, das zweite zu 3,75 % ausgeliehen, so vermindert sich die ganze jährliche Einnahme um 16,25 Gulden. Berechne die Kapitalien.

450842

Drei Mathematiker sitzen am Abend in fröhlicher Runde in einem Biergarten am Waldesrand. Plötzlich fällt ein Schuss. Sie schauen zur Uhr, und kurz darauf sagt einer von ihnen: „Der Schuss fiel genau h Stunden, m Minuten und s Sekunden vor Mitternacht und merkwürdig: h, m und s sind Primzahlen, die der Gleichung $3s = h + m$ genügen.“ Darauf antwortet der zweite: „Auch die Anzahl der vollen Minuten bis Mitternacht ist eine Primzahl.“ Und der dritte sagt nach kurzer Prüfung mit dem Taschenrechner: „Sogar die Anzahl der Sekunden bis Mitternacht ist eine Primzahl.“

Weise nach, dass man aus diesen (etwas kuriosen) Angaben eindeutig ermitteln kann, wann die Mathematiker den Schuss hörten und gib diesen Zeitpunkt an.

Hinweis: In dieser Aufgabe muss die Feststellung, dass eine Zahl Primzahl ist, nicht begründet bzw. bewiesen werden. Zur Ermittlung weiterer Primzahlen kann die folgende Liste aller Primzahlen unter 100 verwendet werden:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

450843

In einem ebenen Punktegitter (gemeint sind alle Punkte in einem Koordinatensystem mit ganzzahligen Koordinaten) wird schrittweise ein Punktmuster aufgebaut:

1. Schritt: Ein beliebiger Punkt wird ausgewählt. Wir beschreiben die Anzahl der im 1. Schritt $A(1)$ festgelegten Punkte mit der Gleichung $A(1) = 1$.

2. Schritt: Zu diesem Punkt fügen wir genau diejenigen vier Gitterpunkte hinzu, die zum ersten Punkt den Abstand 1 haben. Folglich gilt $A(2) = 1 + 4 = 5$.

3. Schritt: Nun fügen wir zu diesen fünf Punkten genau diejenigen acht Gitterpunkte hinzu, die den Abstand 1 haben und bisher noch nicht im Muster erfasst sind. Folglich gilt $A(3) = 5 + 8 = 13$.

a) Berechne in der angegebenen Weise die Anzahl $A(7)$ der Punkte, die das Punktmuster nach Ausführung des 7. Schrittes hat.

b) Philipp will wissen, wie viele Punkte nach dem 2006. Schritt auf die angegebene Weise erfasst sind. Leite eine geeignete Formel her und berechne mit deren Hilfe $A(2006)$.

c) Betrachte nun dieses Muster im Raum, wobei $B(1) = 1$ bedeutet, dass im 1. Schritt ein beliebiger Punkt ausgewählt wurde. Ermittle die Anzahlen $B(2)$ und $B(3)$ dieses räumlichen Punktmusters.

d) Gib eine Beziehung an, die es gestattet, die Anzahl $B(n)$ aus den bereits ermittelten Anzahlen $A(n)$ zu berechnen und berechne mit deren Hilfe $B(6)$. (Eine Herleitung oder ein Beweis wird in dieser Teilaufgabe nicht verlangt.)