45. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 9/10
Aufgaben

© 2005 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweise: 1. *Es stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

451011

Aus der Menge M der natürlichen Zahlen von 1 bis 120 wählt man 13 Zahlen, welche paarweise verschieden sind, aus.

a) Zeigen Sie: Unter den gewählten Zahlen befinden sich mindestens zwei, die sich um höchstens 9 unterscheiden.

b) Zeigen Sie: Unter den gewählten Zahlen befinden sich mindestens zwei, deren Differenz ein Vielfaches von 10 ist.

c) Kann man bei b) mit weniger als 13 auszuwählenden Zahlen auskommen?

451012

Wie viele fünfstellige natürliche Zahlen gibt es, deren letzte Ziffer eine 4 ist und die durch 6 teilbar sind?

Hinweis: Eine natürliche Zahl heißt n-stellig, wenn sie mit n Ziffern im dekadischen System dargestellt werden kann, wobei die 1. Ziffer ungleich null ist.

451013

Die Felder eines Quadrats aus 4×4 Teilquadraten sollen mit je einer von 4 Farben eingefärbt werden. Die Färbung soll so erfolgen, dass bei Drehung des Quadrats um 90°, 180° und 270° um den Quadratmittelpunkt je zwei Felder gleicher Farbe auf zwei Felder gleicher Farbe abgebildet werden; letztgenannte Farbe soll aber von der erstgenannten verschieden sein.

Wie viele solche Möglichkeiten gibt es? Möglichkeiten, die durch Drehung auseinander hervorgehen, sollen nicht als verschieden gelten.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

451014

Peter versucht spitzwinklige Dreiecke zu finden, mit denen sich ein weiteres Dreieck zusammenlegen lässt. Nach vielen Versuchen meint er: „Mit 4 Dreiecken kann man die Aufgabe lösen, mit weniger als 4 Dreiecken aber nicht.“ Hat Peter recht?

451015

In einer Ebene liegen zwei Strecken. Man zeige, dass es möglich ist, unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal eine Gerade zu konstruieren, so dass die senkrechten Projektionen der Strecken auf diese Gerade gleich lang sind.

Hinweis: Ist die Projektion ein einzelner Punkt, so ist ihre Länge 0.

451016

Es seien x, y reelle Zahlen mit $y \geq 0$ und $y \cdot (y+1) \leq (x+1)^2$. Zeigen Sie, dass dann $y \cdot (y-1) \leq x^2$ gilt.