Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

44. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 12/13
Aufgaben
2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

441334

Gegeben seien reelle Zahlen a, x_0 und y_0. Durch die rekursive Vorschrift

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a(x_n - y_n) \\ y_{n+1} &= a(x_n + y_n) \end{aligned}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

werden zwei Folgen (x_k) und (y_k) definiert. Man bestimme in Abhängigkeit von x_0 und y_0 alle Zahlen a, für die die Folge (x_k) periodisch ist.

Hinweis: Eine Folge (x_k) heißt periodisch, falls eine positive ganze Zahl p existiert, mit der $x_{k+p} = x_k$ für alle nichtnegativen ganzen Zahlen k gilt.

441335

Man entscheide, welche der folgenden Aussagen wahr sind:

a) Es existiert ein Tetraeder, für das es eine Ebene so gibt, dass die senkrechte Parallelprojektion des Tetraeders auf diese Ebene ein Rechteck ist.

b) Für jedes Tetraeder gibt es eine Ebene so, dass die senkrechte Parallelprojektion des Tetraeders auf diese Ebene ein Rechteck ist.

c) Für jedes Tetraeder gibt es eine Ebene so, dass die senkrechte Parallelprojektion des Tetraeders auf diese Ebene ein Parallelogramm ist.

Hinweis: Tetraeder sind alle diejenigen Körper, die von genau vier Dreiecken begrenzt werden.

441336

Es seien a, b ganze Zahlen und $p_1, p_2, \ldots, p_6$ Primzahlen. Man ermittle alle derartigen Zahlen, die das Gleichungssystem

$$a^6 - b^6 = p_1 p_2 p_3 \tag{1}$$
$$a^3 + b^3 = p_1 p_2 \tag{2}$$
$$a + b = p_1 \tag{3}$$
$$ab = p_4 p_5 p_6 \tag{4}$$

erfüllen.