Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

44. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulstufe)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

440811

Es war schon im 16. Jahrhundert üblich, Geld für eine bestimmte Zeit gegen einen „Gewinn“ zu verleihen oder für Steuerschulden Zinsen zu verlangen. Bereits in einem Rechenbuch von Adam Ries findet sich ein Kapitel mit der Überschrift „Vom Gewinn nach der Zeit“. Es enthält zahlreiche Rechenaufgaben zur Verzinsung. Dabei wurde stets vorausgesetzt, dass eine bestimmte Geldmenge einen Gewinn erbringt, welcher proportional mit der Zeit anwächst.

Eine Aufgabe lautet: „Also: 12 Gulden gewinnen in 3 Jahren 7 Gulden. In wie viel Jahren würden 20 Gulden 12 Gulden gewinnen?“

a) Bestimme die fragliche Ausleihzeit. Gib das Ergebnis in Jahren und Monaten (gerundet) an!

b) Welcher Zinssatz ist damals zu Grunde gelegt worden? Vergleiche mit heute üblichen Zinssätzen. Was würdest du dazu sagen?

440812

Anton will zur Vorbereitung auf einen Mathetest eine bestimmte Anzahl von Aufgaben lösen. Auf die Frage, wie viele Übungsaufgaben er denn schon geschafft habe, antwortet er: „Die Anzahl der von mir bereits gelösten Aufgaben ist um 31 größer als die Anzahl der noch nicht gelösten. Wenn ich zur Anzahl der gelösten Aufgaben die doppelte Anzahl der von mir noch nicht gelösten Aufgaben addiere, so erhalte ich eine ganze Zahl, die kleiner als 100 ist. Addiere ich aber zur Anzahl der gelösten Aufgaben ein Drittel der Anzahl der noch nicht gelösten Aufgaben, bekomme ich eine Zahl, die größer als 45 ist“.

Ist durch diese Angaben die Anzahl der Aufgaben, die Anton durchrechnen möchte, eindeutig zu ermitteln? Wenn ja, wie groß ist diese Anzahl? Wenn nein, dann ermittle alle Aufgabenanzahlen, die die gestellten Bedingungen erfüllen!

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

440813

Über fünf Punkte A, B, C, D, E wird vorausgesetzt:

(1) Die Punkte liegen in dieser Reihenfolge auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt M.
(2) Der Mittelpunkt M liegt auf $\overline{AC}$.
(3) Die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ sind gleich lang.
(4) Die Strecken $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ und $\overline{EA}$ sind gleich lang.

a) Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen folgt, dass die Dreiecke MCD, MDE und MEA kongruent sind!
b) Berechne die Größe der Winkel im Dreieck BCD!

440814

Wir bezeichnen für $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(n)$ die Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen aus der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Man nennt φ auch die *Eulersche Funktion* zu Ehren des berühmten Schweizer Mathematikers Leonhard Euler (1707–1783). Die Funktion spielt in der Zahlentheorie, wie man die Teilbarkeitslehre auch nennt, eine wichtige Rolle.

Beispiel: Die Zahlen 2, 3 und 4 sind teilerfremd zur Zahl 5; zusammen mit der 1 sind dies 4 Zahlen. Es gilt also $\varphi(5) = 4$.

a) Zeige die Gültigkeit der Gleichung $\varphi(5) \cdot \varphi(7) = \varphi(35)$.
b) Überprüfe, ob für zwei beliebige, verschiedene natürliche Zahlen m und n gilt:
$$\varphi(m) \cdot \varphi(n) = \varphi(m \cdot n).$$
c) Ist p eine Primzahl und n eine positive ganze Zahl, dann gilt stets $\varphi(p^n) = p^{n-1} \cdot (p-1)$. Weise diese Beziehung nach.
d) Sind p und q zwei verschiedene Primzahlen, dann gilt stets $\varphi(p \cdot q) = \varphi(p) \cdot \varphi(q)$. Weise diese Beziehung nach.