Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

43. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 10
Aufgaben
2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

431044

In einer Ebene liegen 10 Kreise $K_1, K_2, \ldots, K_{10}$ mit den Radien $r_1, r_2, \ldots, r_{10}$ so, dass je zwei Kreisflächen keine inneren Punkte gemeinsam haben. In der gleichen Ebene liege ein weiterer Kreis K_0 mit dem Radius r_0, für den

$$r_0^2 = r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_{10}^2$$

gilt.

Beweisen Sie, dass für 11 Kreise dieser Art stets gilt: Die Summe der Inhalte der Flächen, die außerhalb von K_0, aber innerhalb von $K_1, K_2, \ldots$ oder K_{10} liegen, ist gleich dem Inhalt der Fläche, die außerhalb von $K_1, K_2, \ldots$ und K_{10}, aber innerhalb von K_0 liegt.

431045

In einem Dreieck ABC wird der Innenwinkel ACB durch die Höhe $\overline{CD}$, die Winkelhalbierende $\overline{CE}$ und die Seitenhalbierende $\overline{CM}$ in vier gleich große Teilwinkel zerlegt.

Bestimmen Sie die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC.

431046

Zeigen Sie: Bei jeder natürlichen Zahl n, bei der die Zahl $n + 1$ durch 24 teilbar ist, ist auch die Summe aller Teiler von n durch 24 teilbar.