Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.

43. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

430711

In einem Buch, das um 1350 geschrieben wurde, veröffentlichte Maximus Planudes folgende Aufgabe:
Ein Maultier und ein Pferd trugen einige Säcke. Das Pferd ermüdete schneller und sagte zum Maultier: „Hilf mir bitte, nimm einen Sack von meinem Rücken und trage du ihn weiter!“ „Würde ich das machen“, erwiderte das Maultier, „so wäre meine Last doppelt so groß wie deine. Wenn du mir aber einen Sack abnimmst und ihn trägst, werden wir die gleichen Lasten tragen.“
Wie viele Säcke trug das Maultier, wie viele das Pferd?

430712

Abergläubische Menschen befürchten Unangenehmes oder erhoffen sich etwas Besonderes, wenn ein Freitag der dreizehnte Tag eines Monats ist.

a) Untersuche, ob im Laufe eines jeden Jahres mindestens einmal ein „Freitag der dreizehnte“ auftritt, unabhängig davon, ob das Jahr ein Schaltjahr ist oder nicht!

b) Wie oft kann es im Jahr höchstens einen „Freitag den dreizehnten“ geben? Auf welchen Wochentag fällt dann der 1. Januar?

430713

Ein allseitig mit Farbe angestrichener Holzwürfel soll so in gleich große Würfel zersägt werden, dass kein Holzteil dabei übrig bleibt. Die anfallenden Sägespäne seien unberücksichtigt.

a) Es werde vorausgesetzt, dass auf diese Weise genau 27 gleich große Würfel entstehen. Wie viele von diesen Würfeln haben keine, wie viele genau eine, wie viele haben genau zwei und wie viele haben drei angestrichene Flächen?

b) Für einen anderen Würfel werde vorausgesetzt, dass er ein Volumen von $27\,\mathrm{dm}^3$ habe. Er soll so zerlegt werden, dass dabei mindestens 30 möglichst große, rauminhaltsgleiche Würfel entstehen, die alle ohne jeden Farbanstrich sind.

   Welche Kantenlänge (in cm) besitzt ein jeder dieser Würfel?

Zusatzaufgabe:
Wenn du Lust hast, dann bilde selbst eine derartige Aufgabe und löse sie!

430714

a) Ein konvexes Sechseck sei so beschaffen, dass durch ein und denselben Punkt in seinem Inneren höchstens zwei Diagonalen verlaufen.

   Zeichne ein derartiges Sechseck und beantworte folgende Fragen:

   (1) Wie viele Diagonalen besitzt dieses Sechseck?

   (2) In wie viele Teilflächen wird das Sechseck durch diese Diagonalen zerlegt?

   (3) Wie viele dieser Teilflächen stoßen an den Rand des Sechsecks, haben also mit dem Sechseck genau zwei oder genau einen Eckpunkt gemeinsam?

b) Zeichne ein regelmäßiges Siebeneck! Überzeuge dich, dass dessen Diagonalen die in Teil a) geforderte Eigenschaft besitzen! Beantworte auch für das Siebeneck die oben gestellten drei Fragen!

   Suche nach diesbezüglichen Vermutungen für ein beliebiges konvexes n-Eck und überprüfe diese Vermutungen für die Fälle $n = 5$, $n = 6$, $n = 7$ und $n = 9$.

c) Beweise die zu (1) und (3) gefundenen Vermutungen für ein beliebiges konvexes n-Eck!

Anmerkung:
In einem konvexen n-Eck sind alle Innenwinkel kleiner als $180°$.