Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.

42. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 12–13
Aufgaben
2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

421344

Von den Mittelpunkten A_1, B_1, C_1 jeder Seite eines spitzwinkligen Dreiecks ABC werden die Lote auf die jeweils anderen beiden Seiten gefällt. A_2, B_2, C_2 seien die im Inneren des Dreiecks liegenden Schnittpunkte von jeweils zwei Loten (siehe Abbildung A421344).

Man beweise, dass der Flächeninhalt des Sechsecks $A_1C_2B_1A_2C_1B_2$ gleich der Hälfte des Flächeninhalts des Dreiecks ABC ist.

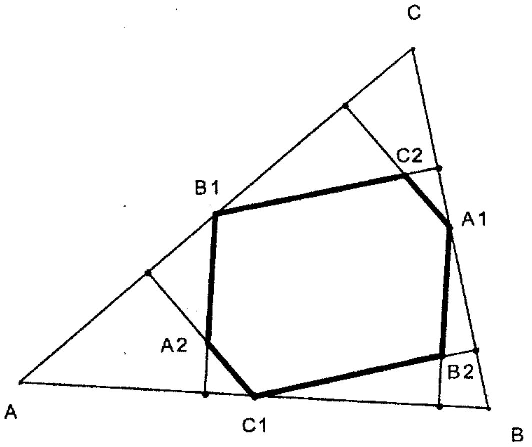

Abbildung A421344

421345

Ist n eine positive ganze Zahl, so bezeichne $a(n)$ die kleinste positive ganze Zahl, deren Fakultät $(a(n))!$ durch n teilbar ist. Man ermittle alle positiven ganzen Zahlen n, für die

$$\frac{a(n)}{n} = \frac{2}{3}$$

gilt.

Hinweis:

Die Fakultät $n!$ der positiven ganzen Zahl n ist das Produkt aller ganzen Zahlen von 1 bis n,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n.$$

421346

Man beweise, dass es unendlich viele Paare positiver ganzer Zahlen $(a; b)$ mit $a > b$ gibt, die folgende Eigenschaften besitzen:

(1) Der größte gemeinsame Teiler von a und b ist 1.

(2) Die Zahl a ist ein Teiler von $b^2 - 5$.

(3) Die Zahl b ist ein Teiler von $a^2 - 5$.