Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.

42. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Länderrunde)
Klasse 9
Aufgaben
2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

420934

Abelix und Bebelix spielen „Diagonalix“ mit einem 2003-Eck, dessen Ecken auf einem Kreis liegen: Abelix und Bebelix zeichnen abwechselnd Diagonalen, d. h. Verbindungsstrecken zwischen zwei nicht benachbarten Eckpunkten, ein. Keine neue Diagonale darf eine vorhandene in einem inneren Punkt schneiden. Gewonnen hat, wer die letzte erlaubte Strecke zeichnet. Abelix beginnt.
Kann ein Spieler den Sieg erzwingen?

420935

Eine überlappungsfreie und lückenlose Überdeckung der gesamten Ebene durch Vielecke nennt man ein *Parkett.*
Beweisen Sie, dass es kein Parkett gibt, in dem alle folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Jedes Vieleck im Parkett ist regelmäßig.

(2) In dem Parkett ist jede Seite eines Vielecks auch Seite eines anderen Vielecks, kein Eckpunkt eines Vielecks liegt also im Inneren der Seite eines anderen Vielecks.

(3) Für jede Sorte regelmäßiger Vielecke des Parketts gilt: Die Vielecksorte ist an allen Eckpunkten des Parketts gleich oft vertreten.

(4) Im Parkett gibt es regelmäßige Zehnecke.

420936

Ermitteln Sie sämtliche reellen Zahlen c mit der Eigenschaft:

Die Ungleichung $c\,x\,y \leq x^2+y^2$ ist für alle reellen Zahlen x, y erfüllt.