



Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.

**42. Mathematik-Olympiade**  
**2. Stufe (Regionalsrunde)**  
**Klasse 9**  
**Aufgaben**

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

420921

Wie viele verschiedene Paare  $(A; B)$  von höchstens fünfstelligen natürlichen Zahlen  $A$  und  $B$  gibt es, bei deren Addition an keiner Stelle ein Übertrag auftritt? *Hinweis:* Auch die Zahlenpaare  $(A; B)$  und  $(B; A)$  mit  $A \neq B$  gelten als verschieden.

420922

Beweisen Sie, dass für jede Primzahl  $p > 5$  die Zahl  $p^4 - 1$  durch 120 teilbar ist.

420923

Bei einem Viereck bezeichnen wir die beiden Strecken, die die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Seiten verbinden, als Mittellinien.  
Beweisen Sie: Die Mittellinien eines Vierecks sind genau dann gleich lang, wenn seine Diagonalen senkrecht zueinander sind.

420924

Gegeben sei ein Quadrat  $ABCD$  mit der Seitenlänge  $a$ .  
Die Menge  $M$  aller Punkte  $P$  der Ebene, für die sowohl das Dreieck  $\triangle ABP$  als auch das Dreieck  $\triangle ADP$  spitzwinklig ist, bildet eine Fläche.

- Stellen Sie diese Fläche  $M$  (zunächst ohne Begründung) graphisch dar (z. B. für  $a = 6$  cm) und berechnen Sie den Flächeninhalt  $F(M)$  in Abhängigkeit von  $a$ .
- Begründen Sie die Korrektheit der Darstellung von  $M$ .
- Beschreiben Sie die Menge  $M'$  aller Punkte  $Q$ , für die sowohl das Dreieck  $\triangle ABQ$  als auch das Dreieck  $\triangle ADQ$  stumpfwinklig ist.