Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.

41. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 11
Aufgaben
2. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

411144

Gegeben sei eine positive reelle Zahl a_1. Die Zahlen a_{n+1} seien für positive ganzzahlige n rekursiv definiert durch

$$a_{n+1} \;=\; 1 + a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Ferner sei

$$b_n \;=\; \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}.$$

Man zeige:

a) Für alle positiven ganzen Zahlen n gilt die Ungleichung $\quad b_n \;<\; \dfrac{2}{a_1}$.

b) Es gibt kein reelles x, so dass $b_n < x < \dfrac{2}{a_1}$ für alle positiven ganzen n gilt.

411145

Ein Trapez $ABCD$ mit rechten Winkeln bei A und D besitze einen Inkreis mit Mittelpunkt M und Radius r. Die Längen der parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ seien a und c, der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ sei S.

1. Man weise nach, dass das Lot von S auf eine der Trapezseiten die Länge r hat.
2. Man bestimme den Abstand zwischen M und S in Abhängigkeit von r und a.

411146

Ralf Reisegern erzählt seinem Freund Markus, einem Mathematiker, dass er in diesem Jahr schon acht Länder der Währungsunion bereist habe. Um seine fünf Kinder für die neuen Cent- und Euro-Münzen zu begeistern, hat er aus jedem der acht Länder fünf (nicht notwendig verschiedene) Münzen mitgebracht. Weil die Kinder auch in Deutschland mit den Münzen bezahlen können, hat Ralf darauf geachtet, dass unter den 40 Münzen auch jeder der acht Werte (1, 2, 5, 10, 20 und 50 Cent, 1 und 2 Euro) genau fünfmal vorkommt. Er hofft nun, jedem Kind acht Münzen schenken zu können, aus jedem Land eine und so, dass jedes Kind Münzen im Gesamtwert von 3,88 Euro erhält. Doch Ralf hat schon einige Zeit erfolglos probiert, die Münzen aufzuteilen. „Das muss aber gehen!“ behauptet Markus, ohne sich die Münzen genauer anzuschauen.
Beweisen oder widerlegen Sie diese Behauptung.