



Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.

**41. Mathematik-Olympiade**

**4. Stufe (Bundesrunde)**

**Klasse 11**

**Aufgaben**

**1. Tag**

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

411141

Man bestimme alle Paare  $(a; b)$  reeller Zahlen  $a, b$ , die Lösungen des Gleichungssystems

$$2a^2 - 2ab + b^2 = a \quad (1)$$

$$4a^2 - 5ab + 2b^2 = b \quad (2)$$

sind.

411142

Unter der Minimaldistanz einer endlichen Punktmenge versteht man die kürzeste unter allen Längen der Verbindungsstrecken zweier verschiedener Punkte dieser Menge.

- a) Man beweise, dass man auf der Oberfläche  $K$  einer Kugel vom Radius  $R$  acht Punkte finden kann, deren Minimaldistanz größer als  $1,15 R$  ist .
- b) Man untersuche, ob es auf  $K$  acht Punkte gibt, deren Minimaldistanz größer als  $1,2 R$  ist.

411143

- a) Man beweise, dass für jede positive ganze Zahl  $n$  eine positive ganze Zahl  $z$  existiert, die genau  $n$  (positive) Teiler besitzt und durch  $n$  teilbar ist.
- b) Für jede Primzahl  $n$  bestimme man alle Zahlen  $z$  mit den unter a) genannten Eigenschaften.