

40. Mathematik-Olympiade

4. Stufe (Bundesrunde)

Klasse 12–13

Aufgaben

1. Tag



Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

401341

Man bestimme alle reellen Zahlen  $q$ , für welche die Gleichung

$$x^4 - 40x^2 + q = 0$$

vier reelle Nullstellen besitzt, die eine arithmetische Folge bilden.

401342

Man bestimme die maximale Anzahl von Punkten, die in einem Rechteck mit den Seitenlängen 14 und 28 so untergebracht werden können, dass der Abstand zweier beliebiger dieser Punkte größer als 10 ist.

401343

Wiebke und Stefan spielen auf einem Blatt Kästchenpapier folgendes Spiel. Sie beginnen mit einem  $n$  Zeilen und  $m$  Spalten großen Rechteck und zerschneiden es abwechselnd Zug für Zug in kleinere Rechtecke. Ein zulässiger Zug von Stefan ist ein senkrechter Schnitt, der ein  $n \times m$  Rechteck in ein  $n \times k$  und ein  $n \times (m - k)$  Rechteck zerlegt ( $k = 1, 2, \dots, m - 1$ ). Wiebke dagegen darf nur waagerechte Schnitte machen. Also wird bei ihr ein  $n \times m$  Rechteck zu einem  $j \times m$  und einem  $(n - j) \times m$  großen Rechteck ( $j = 1, 2, \dots, n - 1$ ). Bei jedem Zug dürfen die beiden also ein Rechteck auswählen und es senkrecht bzw. waagerecht beliebig in zwei Teile schneiden.

Am Ende verliert derjenige, der keinen Schnitt mehr machen kann. Wenn also nur noch  $j \times 1$  Rechtecke übrig sind, verliert Stefan, sind nur noch  $1 \times k$  Rechtecke übrig, verliert Wiebke. Das Spiel wird jetzt mit einem  $60 \times 40$  Rechteck begonnen.

a) Wer kann den Gewinn erzwingen, wenn Stefan anfängt?

b) Wer kann den Gewinn erzwingen, wenn Wiebke anfängt?

Beispiel:

Die Abbildung zeigt exemplarisch den Beginn eines Spiels mit einem  $4 \times 3$  Rechteck, bei dem Wiebke den ersten Zug macht.

