Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e. V.

40. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 10
Aufgaben
1. Tag

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

401041

a) Beweisen Sie: Für jede natürliche Zahl a ist die Zahl a^2 entweder von der Form $4k$ oder von der Form $8k+1$, wobei jeweils k eine natürliche Zahl ist.

b) Gibt es eine n-stellige Quadratzahl mit $n > 1$, die aus lauter gleichen Ziffern besteht?
Beweisen Sie Ihre Antwort!

401042

Drei Schüler haben sich längere Zeit mit der Ungleichung

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > 10,$$

bei der auf der linken Seite als Nenner alle natürlichen Zahlen von $n+1$ bis n^2 auftreten, befasst.
Als sie sich wieder trafen, wurden von ihnen folgende Behauptungen aufgestellt:
A: „Diese Ungleichung ist für keine natürliche Zahl n wahr."
B: „Es gibt natürliche Zahlen n, für die die Ungleichung gilt."
C: „Das stimmt, und zwar gibt es eine solche Zahl n zwischen 1000^2 und 1050^2."
Welche dieser Behauptungen ist wahr, welche falsch?

401043

Gegeben sei ein Kreis mit dem Radius 1 und den Punkten Z, A und B auf seiner Peripherie; k sei der Kreisbogen von A bis B, der Z nicht enthält.
Man konstruiere das Bild von k, welches entsteht, wenn man jeden Punkt P von k auf einen Punkt P' so abbildet, dass $|ZP| \cdot |ZP'| = 4$ gilt und P' auf dem von Z ausgehenden durch P gehenden Stahl liegt.