



Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

40. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 11 bis 13
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

401311

Man ermittle zu jeder reellen Zahl a alle diejenigen Paare reeller Zahlen $(x; y)$, die Lösungen des folgenden Gleichungssystems (1), (2) sind:

$$x^2 + y^2 = a \quad (1)$$

$$x + y = a \quad (2)$$

401312

Für einen mathematischen Wettbewerb zwischen zwei Klassen stellt die eine Klasse folgende Aufgabe:

In unserer Klasse sind weniger als 30 Schüler, die aus genau sechs verschiedenen Orten A, B, C, D, E und F kommen. Für die Anzahl der aus einem Ort kommenden Schüler gelten folgende Aussagen:

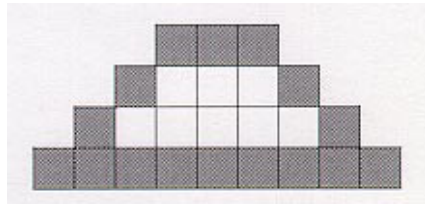
- (1) Aus A kommt genau ein Schüler.
- (2) Aus B kommen mindestens die Hälfte, aber nicht mehr als 70% der Schüler.
- (3) Aus C kommen genau 25% der Anzahl der Schüler aus B, das sind mehr als die Anzahl der Schüler aus E und weniger als die Anzahl der Schüler aus F.
- (4) Aus D kommen zusammen mit der Anzahl der Schüler aus F genau 50% der Anzahl der Schüler aus B.
- (5) Würde die Anzahl der Schüler aus E zur Anzahl der Schüler der Klasse addiert, so wären das doppelt so viel wie die Anzahl der Schüler aus B.
- (6) Aus F kommen so viel Schüler wie aus A, D, E zusammen.

Ermitteln Sie die Anzahl der Schüler aus den einzelnen Orten.

401313

Familie Schiefleck mag keine Rechtecke. Deshalb soll der neue Sitzplatz im Garten 'trapezförmig' angelegt werden (s. Abbildung).

Dazu sollen quadratische Platten gleicher Größe in zwei Farben verwendet werden. Die dunklen Platten sollen einen äußeren Rand bilden. Im Baumarkt gibt es noch genau 50 dunkle Platten, die Familie Schiefleck alle kauft. Helle Platten sind genügend viele vorrätig. Wie viele helle Platten müssen gekauft werden, wenn die Fläche des Sitzplatzes möglichst groß werden soll?



401314

Im Raum seien zwei Kugeln mit dem Radius 1 gegeben, deren Mittelpunkte M_1, M_2 den Abstand 1 haben. Auf dem Schnittkreis der beiden Kugeln seien weiter zwei Punkte P, Q gegeben, die den Abstand $\frac{3}{2}$ haben. Durch M_1, M_2 und P bzw. M_1, M_2 und Q ist jeweils eine Ebene bestimmt.

Wie groß ist der kleinere Winkel zwischen diesen Ebenen?